Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Lagrange-F.: $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$, $i = 1, \dots, f$

mit $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (verallg. Impuls)

Erhaltungssätze

a) Hom. d. Zeit:

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}$$

$\overset{!}{=} 0$, also keine explizite Zeitabhängigkeit

$$= \frac{d}{dt} \sum_{1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \quad \text{(Beweis durch Ausdifferenzieren)}$$

bzw. $$0 = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{1}^{f} p_i \dot{q}_i - L \right\}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{H := \sum_{1}^{f} p_i \dot{q}_i - L = \text{const.}} \quad \text{Hamilton-Funktion} \qquad (1)$$

dies Def. soll auch gelten, wenn $\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0$

b) Hom. d. Raumes: $L = L(\{\vec{r}_j\}, \{\dot{\vec{r}}_j\}, t)$, $j = 1, \dots, n$

Änd. v. L bei virt. Verrückg.

$$\delta L = \sum_{1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} \delta \vec{r}_j \overset{!}{=} \delta \vec{s} \sum_{1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} \overset{!}{=} 0 \quad \forall\, \delta \vec{s}$$

alle $\delta \vec{r}_j = \delta \vec{s}$

$$\rightsquigarrow \sum_{1}^{n} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j}} = \vec{0} \quad (\Sigma \text{ aller Kräfte} = 0 \rightarrow \text{Newton III})$$

$\hookrightarrow$ actio = reactio

← Euler: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} = \vec{0}$

$$\rightsquigarrow \boxed{\vec{P} := \sum_{1}^{n} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j}}_{\vec{p}_j} = \overrightarrow{\text{const.}}} \quad \text{Gesamtimpuls des Systems} \qquad (2)$$

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Einschub: Physikalische Bedeutung v. H

Kinetische Energie T von n Teilchen

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

in verallgemeinerten Koordinaten q_k bzw. $\dot{q}_k$: Sei
$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f, t) \; \forall i$ (f = Anzahl Freiheitsgrade)

$$\rightsquigarrow \dot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\rightsquigarrow \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_k^f \sum_l^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_k \dot{q}_l + 2\sum_k^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\rightsquigarrow T = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k,l}^{f}\sum_{i}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_k \dot{q}_l}_{T_2} + \underbrace{\sum_k^f \sum_i^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_k}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i^n m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2}_{T_0}$$

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{T = T(q_i, \dot{q}_i, t) = T_2(q_i, \dot{q}_i, t) + T_1(q_i, \dot{q}_i, t) + T_0(q_i, t)}}$$

D. h. T_2 homogen vom Grad 2 bzgl. $\dot{q}$, weil $T_2(q_i, a\cdot\dot{q}_i, t) = a^2\, T_2(q_i, \dot{q}_i, t)$ (entsprechend T_1 homogen vom Grad 1 mit $a \in \mathbb{R}$).

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Einschub (Forts.)

1. Annahme: Statt allgemeinen holonomen Zwangsbedingungen $f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0$ setzen wir holonom-sklerонome Zwangsbedingungen voraus, also $f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ bzw. $\frac{\partial f_\nu}{\partial t} = 0 \; \forall \nu$
$\Leftrightarrow$ die $\vec{r}_i$ dürfen nicht explizit zeitabhängig sein (weil sonst $f_\nu(\vec{r}_i) = \tilde{f}_\nu(q_i, t)$, also $\frac{\partial \tilde{f}_\nu}{\partial t} \neq 0$), also $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \equiv 0 \;\; \forall i$

$$\curvearrowright \quad T_1 = T_0 = 0$$

$$\curvearrowright \quad T = T_2 = T(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \text{mit} \quad \tilde{T}(q_i, \underbrace{a\dot{q}_i}_{\xi_i(a)}, t) = a^2 T(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$\curvearrowright \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial a} = \sum_i^f \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial a} = \sum_i^f \frac{\partial \tilde{T}}{\partial (a\dot{q}_i)} \dot{q}_i = 2 \cdot a \cdot T \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Speziell: $a = 1$

$$\curvearrowright \sum_i^f \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T \qquad \text{und } \tilde{T} = T \text{ für } a = 1$$

2. Annahme: Es existiert ein Potential $V(q_i, t)$, so dass wg. $L = T - V$ gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

In (1) berücksichtigt:

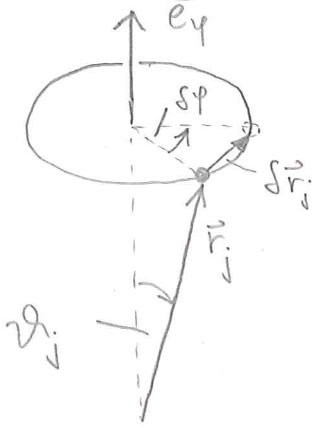
$$H = \sum_i^f \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \dot{q}_i - L = \sum_i^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - L$$

$$= 2T - (T - V) = T + V = E \;\; = \text{Gesamtenergie}$$

$\curvearrowright$ $H = E$ (jetzt also Energieerhaltungssatz), wenn holonom-sklerонome Zwangsbedingungen vorliegen und ein Potential $V(q_i, t)$ existiert!

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

c) Isotropie d. Raumes:



$$\delta\vec{\varphi} := \vec{e}_\varphi \cdot \delta\varphi$$

$$|\delta\vec{r}_j| = |\vec{r}_j| \cdot \sin\vartheta_j \cdot \delta\varphi \quad \text{(Def. des Winkels)}$$

$$\rightsquigarrow \quad \delta\vec{r}_j = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_j$$

analog aus Ähnlichkeitsbetrachtung bzgl. der Winkel:

$$\delta\vec{v}_j = \delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_j$$

$$\delta L = \sum_1^n \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j} = \dot{\vec{p}}_j} \delta\vec{r}_j + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j}}_{\vec{p}_j} \delta\vec{v}_j + \frac{\partial L}{\partial t} \underbrace{\cancel{\delta t}}_{\equiv 0 \text{ wg. virtueller Drehung}}$$

$$= \sum_1^n \dot{\vec{p}}_j (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_j) + \vec{p}_j (\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_j)$$

zykl. Vertauschung: $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a})$

$$\rightsquigarrow \quad \delta L = \delta\vec{\varphi} \sum_1^n \underbrace{\vec{r}_j \times \dot{\vec{p}}_j + \vec{v}_j \times \vec{p}_j}_{\frac{d}{dt}(\vec{r}_j \times \vec{p}_j)}$$

(Beweis durch Ausdiff. gemäß Produktregel)

$$= \delta\vec{\varphi} \, \frac{d}{dt} \sum_1^n \vec{r}_j \times \vec{p}_j \overset{!}{=} 0 \quad \forall \, \delta\vec{\varphi}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt} \sum_1^n \vec{r}_j \times \vec{p}_j = \vec{0}$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{L} := \sum_1^n \vec{r}_j \times \vec{p}_j = \overrightarrow{\text{const.}}} \quad \text{Gesamtdrehimpuls des Systems} \qquad (3)$$

Ist hier nicht relevant

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Formulierung klassische Mechanik:

1. Newton: $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(ex)} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}}_{\text{Zwangskräfte}}$

   (Problem: $\vec{F}_{ij}$ i.a. unbekannt)

2. Lagrange: $\boxed{\frac{d}{dt} \cdot \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$; $j = 1, \dots, f$ (4)

   Lagrange-Bewegungsgleichungen

   f: Freiheitsgrade

   $p_j \rightarrow$ verallg. Impulse

   (in allen Koord. gültig; keine Zwangskräfte; forminvariant bzgl. Punkttransf.

3. Hamilton
4. Hamilton-Jacobi

zu 3.: Hamilton-Mechanik

gemäß (1): $H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$

kein Widerspruch:

wg. $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q_i, \dot{q}_i, t)$

$\rightsquigarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(p_i, q_i, t)$ einsetzen!

$$\rightsquigarrow dH = \sum_i \left(dp_i \cdot \dot{q}_i + \cancel{p_i \, d\dot{q}_i} \right) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} d\dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_i \left(dp_i \, \dot{q}_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\dot{p}_i \text{ (vgl. (4))}} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_i \left(\dot{q}_i \, dp_i - \dot{p}_i \, dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (*)$$

Andererseits wg. $H = H(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$:

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (**)$$

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Da p_i, q_i u. t unabhängige Koordinaten:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}} \qquad (5)$$

Hamiltonsche - Bewegungsgleichungen
(= Kanonische Gleichungen)

Ferner: aus (**) folgt

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \Big(\frac{\partial H}{\partial p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{-\frac{\partial H}{\partial q_i}} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \underbrace{\dot{q}_i}_{\frac{\partial H}{\partial p_i}} \Big) + \frac{\partial H}{\partial t} \;\rightsquigarrow\; \boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}} \qquad (6)$$

$\rightsquigarrow$ H Bewegungsintegral, falls $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ $\rightsquigarrow$ $H = \text{const.}$

$\downarrow$

$\equiv$ Energiesatz, falls keine theonomen Zwangsbedingungen

Vorgehensweise:

1. generalisierte Koord. $\underbrace{\{q_i\}}_{\equiv \vec{q}}$ festlegen und Transformationsgleichungen $\vec{r}_j = \vec{r}_j(\{q_i\}, t)$; $j = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, f$ und $\dot{\vec{r}}_j = \dot{\vec{r}}_j(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ aufstellen
2. T und V in Teilchenkoordinaten $(\vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_j)$ formulieren und $L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = T(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) - V(\{q_i\}, t)$ berechnen
3. generalisierte Impulse $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ $\rightsquigarrow$ $p_i = p_i(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ berechnen
4. Auflösen nach $\dot{q}_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$ (um $\dot{q}_i$ zu eliminieren)
5. $\rightsquigarrow$ $L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}, t)\}, t) = \tilde{L}(\vec{q}, \vec{p}, t)$
6. Legendre-Transf.:

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}, t) - \tilde{L}(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

7. Kanonische Gleichungen aufstellen u. lösen

Einschub: Eikonal (Übergang Wellenoptik → geom. Optik)

Aus Maxwell folgt die Wellengleichung, die auch Lichtausbreitung beschreibt:

$$\Delta\phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = 0 \qquad (7a)$$

(*) gilt nur, wenn $\mu \cdot \varepsilon = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_r = \text{const.}$ Mit $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ und $\mu_r \varepsilon_r = n^2$ (n = Brechungsindex):

$$\Delta\phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (7b)$$

mit $u := c/n$ = Phasengeschwindigkeit und $n = \text{const.}$

Jetzt Annahme: Wellenlänge sehr klein ($\to 0$) gegen geometrische Abmessungen, insbesondere auch klein gegen mögliche räumliche Inhomogenitäten von μ_r und ε_r und damit von n. Es soll also (Quasi) $n = n(\vec{r})$ gelten, aber in einer Umgebung eines Raumpunktes (Umgebung $\gg \lambda$) kann n als näherungsweise konstant angenommen werden, so dass in dieser Umgebung also weiterhin (in (sehr) guter Näherung) (7b) angewandt werden kann.

Im Detail: exakte Lösung von (7b):

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \qquad \text{(ebene Welle)}$$

Über größere Distanzen n nicht konstant (= schwach inhomogenes Medium) keine ebene Welle mehr möglich, deshalb neuer Ansatz: Mit $\vec{k} = |\vec{k}| \cdot \vec{e}_k$ (mit $|\vec{e}_k| = 1$), $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{u/f} = \frac{\omega}{c} n = \frac{2\pi}{c/f} n = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = |\vec{k}_0| \cdot n$

$$\rightsquigarrow \phi(\vec{r}, t) \overset{\text{Ansatz}}{=} \underbrace{\phi_0(\vec{r})}_{\substack{\text{habe die Form} \\ \phi_0 \cdot e^{A(\vec{r})}}} \, e^{i k_0 \left(\underbrace{n(\vec{r}) \cdot \vec{e}_k \cdot \vec{r}}_{L(\vec{r})} - \frac{\omega}{k_0} t \right)}$$

$L(\vec{r})$ → Eikonal

$\frac{\omega}{k_0} = c$ → Vakuumlichtgeschwindigkeit

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Einschub (Forts.)

$$\rightsquigarrow \phi(\vec r,t) = \phi_0\, e^{A(\vec r)} \cdot e^{ik_0(L(\vec r)-ct)} \qquad (8)$$

Bei festgehaltener Zeit ($t=\text{const.}$) beschreibt $\underbrace{L(\vec r)=\text{const.}}_{\text{Flächengleichung}}$ also die Phase der Welle.

Bestimmung von $L(\vec r)$ bei bekanntem $n(\vec r)$:

Einsetzen von (8) in (7b):

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \phi_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{A(\vec r)+ik_0[L(\vec r)-ct]}\right] = \phi\cdot\left[\frac{\partial A}{\partial x} + ik_0\frac{\partial L}{\partial x}\right]$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot[\ldots] + \phi\cdot\frac{\partial[\ldots]}{\partial x} = \phi\underbrace{[\ldots]^2}_{=\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + 2ik_0\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x} - k_0^2\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2} + \phi\left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + ik_0\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right]$$

analog für y u. z:

$$\Delta\phi = \phi\left\{(\vec\nabla A)^2 + 2ik_0\,\vec\nabla A\cdot\vec\nabla L - k_0^2(\vec\nabla L)^2 + \Delta A + ik_0\Delta L\right\}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \phi(-c)^2\cdot(ik_0)^2 = -\phi c^2 k_0^2$$

$$\rightsquigarrow (\vec\nabla A)^2 + 2ik_0\,\vec\nabla A\cdot\vec\nabla L - k_0^2(\vec\nabla L)^2 + \Delta A + ik_0\Delta L - \frac{n^2}{c^2}(-c^2k_0^2) = 0$$

Aufteilung in Real- u. Imaginärteil:

$$(*)\begin{cases} (\vec\nabla A)^2 - k_0^2(\vec\nabla L)^2 + \Delta A + n^2k_0^2 = 0 = \dfrac{(\vec\nabla A)^2 + \Delta A}{k_0^2} + n^2 - (\vec\nabla L)^2 \\ 2\cancel{k_0}\,\vec\nabla A\,\vec\nabla L + \cancel{k_0}\Delta L = 0 \end{cases}$$

nach Diskussion mit André

Für $k_0 \to \infty$ gilt dann:

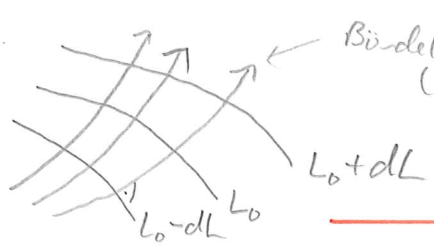
$$\rightsquigarrow n^2 - (\vec\nabla L)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

bzw. $\boxed{(\vec\nabla L)^2 = n^2}$ (9)

für geom. Optik von ähnlicher Bedeutung wie Newton-Gleich. für klass. Mechanik

Eikonal-Gleichung (εἰκών = Bild, Abbild)

Aus (9) folgt $L(\vec r)$. $A(\vec r)$ folgt dann aus $2\vec\nabla A\,\vec\nabla L + \Delta L = 0$.
Wg. Phase $= \varphi(\vec r,t) := k_0[L(\vec r)-ct]$ ist $\vec\nabla L \perp$ auf Phase und damit in Ausbreitungsrichtung, d.h. $\vec\nabla L$ ist Richtung des Lichtstrahls. Für $n=\text{const.}$ liefert (9) gerade Lichtstrahlen.



Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Einschub (2. Forts.)

Eine erweiterte Eikonalgleichung

Zur Bestimmung der Eikonalgleichung wurde von der Lösung

$$\phi(\vec{r},t) = \underbrace{\phi_0(\vec{r})}_{=\phi_0 \cdot e^{A(\vec{r})}} e^{i k_0 (L(\vec{r}) - ct)}$$

der Dgl. $\Delta\phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$ für $k_0 \to \infty$ ausgegangen.

Geht man von der Lösung

$$\phi(\vec{r},t) = \phi_0 \, e^{A(\vec{r})} \cdot e^{i P(\vec{r})}$$

mit $P(\vec{r}) = k_0 (L(\vec{r}) - ct)$ aus und setzt diese wie gehabt in die Wellen-Dgl. ein, erhält man – ganz analog wie vorher – jetzt (vgl. S. 6)

$$(\vec{\nabla} A)^2 + \Delta A - (\vec{\nabla} P)^2 + \frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 = 0$$

$$2(\vec{\nabla} A)(\vec{\nabla} P) + \Delta P - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt (wieder) für $k_0 \to \infty$ (beachte: $P \sim k_0$):

$$\boxed{(\vec{\nabla} P)^2 = \overbrace{\frac{n^2}{c^2}}^{1/u^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2} \qquad (9a)$$

mit

$$\boxed{P = k_0 L(\vec{r}) - k_0 c t} \qquad (9b)$$

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

zu 4.: Hamilton – Jacobi – Verfahren

Die Lösung der kanonischen Gleichungen (5) wird besonders einfach, wenn es sich bei den q_i und/oder den p_i um sog. „zyklische Variable" handelt. Der von Helmholtz stammende Begriff besagt:

zykl. Variable = nicht explizit in H auftretend

Beispiel: q_i zyklisch $\rightsquigarrow$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \rightsquigarrow p_i = \alpha_i = \text{const.}$
(d.h. p_i Erhaltungsgröße)

Annahme: Alle q_i sind zyklisch, also $H = H(p_1, p_2, \dots p_f)$
(H und damit L seien nicht explizit zeitabh.)

$$\rightsquigarrow \quad p_i = \alpha_i = \text{const.} \quad \forall i$$
↳ bzgl. der Zeit

$$\rightsquigarrow \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} =: \omega_i = \text{const.}$$

$$\rightsquigarrow \quad q_i(t) = \omega_i \cdot t + \beta_i \quad \longrightarrow \text{ vollständige Lösung}$$
↳ Integrationskonste

Problem: I. Allg. liegen keine zyklischen q_i vor

Lösung: Kanonische Transformation, d.h. Transformation auf neue Variable derart, dass kanonische Gleichungen erhalten bleiben (und zykl. Koord. auftreten):

$$H = H(p_k, q_k, t) \longrightarrow H^* = H^*(P_k, t)$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial H^*}{\partial P_k} = \dot{Q}_k \quad \text{und} \quad -\frac{\partial H^*}{\partial Q_k} = \dot{P}_k \qquad (**)$$

$$\text{und} \quad p_k = p_k(P_1, \dots, P_f, Q_1, \dots, Q_f, t) =: p_k(P_k, Q_k, t) \qquad (\#)$$

$$q_k = q_k(P_k, Q_k, t) \quad , \quad k = 1, \dots, f$$

(**) ist erfüllt, wenn wg. $\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \overset{(1)}{=} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H \right\} dt = 0$

auch $\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - H^* \right\} dt = 0$ gilt.

Falls kan. Transf. einfach durch Einsetzen erfolgt (also $H^* = H(\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}, t), \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P}, t), t)$), dann "kanonisch im engeren Sinn".

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

<u>Beispiel:</u> $Q_i = -p_i \;,\; P_i = q_i$

$$\rightsquigarrow \; H^* = H^*(Q_i, P_i, t) = H(P_i, -Q_i, t)$$

$$\rightsquigarrow \; \boxed{\frac{\partial H^*}{\partial P_i} = \frac{\partial H(P_i, -Q_i, t)}{\partial P_i} = \frac{\partial H(q_i, p_i, t)}{\partial q_i} \overset{(5)}{=} -\dot{p}_i = \dot{Q}_i}$$

$$\boxed{\frac{\partial H^*}{\partial Q_i} = \frac{\partial H(P_i, -Q_i, t)}{\partial Q_i} = -\frac{\partial H(q_i, p_i, t)}{\partial p_i} \overset{(5)}{=} -\dot{q}_i = -\dot{P}_i}$$

= (**), d.h. in der Tat kanonisch (bzw. [illegible]

‖ p_i und q_i <u>vertauschbar</u>, also völlig gleichberechtigt!

<u>Allgemeine kanonische Transformation:</u>

Phasentransformation $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$ kanonisch, wenn

$$(10) \qquad \sum_k p_k \dot{q}_k - H \overset{!}{=} \sum_k P_k \dot{Q}_k - H^* + \frac{dF(p_k, q_k, P_k, Q_k, t)}{dt}$$

F hängt in (zunächst) beliebiger Weise von den 4f Variablen p_k, q_k, P_k und Q_k ab. Andererseits: Es gibt nur 2f Verknüpfungsgleich. (#) zwischen den (p_k, q_k) und (P_k, Q_k), so dass von allen Variablen nur 2f unabhängig sind!

$\rightsquigarrow$ F lässt sich stets als Funktion von 2f der alten und der neuen Koordinaten ausdrücken (zzgl. der Zeit). Man hat also 4 Wahlmöglichkeiten*):

a) $F = F_1(q_k, Q_k, t)$

b) $F = F_2(q_k, P_k, t) - \sum_k Q_k P_k$

c) $F = F_3(Q_k, p_k, t) + \sum_k q_k p_k$

d) $F = F_4(p_k, P_k, t) + \sum_k q_k p_k - \sum_k Q_k P_k$

$\Bigg\}$ entspricht Legendre-Transf.

F heißt <u>Erzeugende der Transformation</u> (10).

---

*) Die zusätzliche Terme in den Fällen b) ... d) sind gemäß (10) sicherlich zulässig. Dass sie auch nützlich sind (und deshalb hier angebracht wurden) wird am Beispiel zu b) gezeigt werden (also für F_2).

Beweis, dass F eine kanonische Transf. gemäß (10) erzeugt:

1. Wg. $L = \sum_k p_k \dot{q}_k - H$ und $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \overset{!}{=} 0$

(woraus Euler-Dgl. folgen), müssen aus

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) \right\} dt \overset{!}{=} 0$$

die kanonischen Gleichungen (5) folgen, nämlich (virtuelle Verschiebung, d.h. Variation δ findet zeitlos ($\delta t \equiv 0$) statt, so dass Integration über die Zeit und Variation vertauscht werden können – gilt auch für Differentiation)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_k (\delta p_k \dot{q}_k + \underbrace{p_k \delta \dot{q}_k}_{p_k \frac{d}{dt} \delta q_k}) - \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right\} \overset{!}{=} 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \; p_k \frac{d}{dt} \delta q_k = \underbrace{p_k \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\equiv 0 \;\forall k,\text{ weil } \delta q_k \equiv 0 \text{ an Integrationsgrenze}} - \int_{t_1}^{t_2} dt \; \dot{p}_k \delta q_k$$

$$\leadsto \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_k \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k - \sum_k \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right\} \overset{!}{=} 0$$

Da alle δp_k und δq_k voneinander unabhängig und ansonsten beliebig, kann letzte Gleichung nur erfüllt werden, wenn wenn alle 2k runden Klammern jeweils Null sind, also

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \text{und} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \forall k,$$

was genau (5) entspricht.

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

2. Damit sind neue Variablen P_k, Q_k mit H^* dann kanonisch, wenn

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H = \sum_k P_k \dot{Q}_k - H^*$$

gilt.

3. Bleibt zu zeigen, dass auch dann kanonische Transformation vorliegt, wenn (10) gilt, wobei hier willkürlich (ist egal!) für F Fall b) auf S. 9 gewählt wurde, also $F = F_2(q_k, P_k, t) - \sum_k Q_k P_k$.

a) In (10) eingesetzt:

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H = \sum_k P_k \dot{Q}_k - H^* + \underbrace{\frac{dF}{dt}}_{\frac{dF_2}{dt} - \sum_k \frac{d}{dt}(Q_k P_k)}$$

$$= \sum_k \left\{ P_k \dot{Q}_k - \frac{d}{dt}(Q_k \cdot P_k) \right\} - H^*$$

$$+ \sum_k \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \dot{P}_k \right\} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Wegen $\frac{d}{dt}(Q_k P_k) = \dot{Q}_k P_k + Q_k \dot{P}_k$:

$$(3*) \quad \sum_k \left(p_k - \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \right) dq_k + \sum_k \left(Q_k - \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \right) dP_k + \left(H^* - H - \frac{\partial F_2}{\partial t} \right) dt = 0$$

Da die q_k, P_k ($\forall k$) und t durch Wahl von F_2 als unabhängige Variable festgelegt wurden, muss (3*) für alle, beliebig wählbare dq_k, dP_k und dt gelten, d.h. insbesondere, dass jeder Summenterm für sich Null sein muss:

$$(11) \quad \boxed{p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \; ; \quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \; ; \quad H^* = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}}$$

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Bei gegebenen q_k, p_k, $H(p_k, q_k, t)$ und $F_2(q_k, P_k, t)$ ergeben sich aus $p_k = \partial F_2/\partial q_k$ durch Auflösen nach $P_k(p_k, q_k, t)$ die gesuchten transformierten Impulse, aus $Q_k = \partial F_2/\partial P_k$ danach die gesuchten $Q_k(p_k, q_k, t)$ und schließlich die neue Hamiltonfunktion $H^*(P_k, Q_k, t)$ aus $H^* = H(p_k(P_k, Q_k, t), q_k(P_k, Q_k, t), t) + \partial F_2(q_k(P_k, Q_k, t), P_k, t)/\partial t$. Damit gilt:

> F_2 ist die Erzeugende der Transformation
> $(p_k, q_k) \to (P_k, Q_k)$ und $H(p_k, q_k, t) \to H^*(P_k, Q_k, t)$

w.z.z.w.

c) Fehlt nur noch die Kanonizität der Transformation vermöge F_2 bzw. $F = F_2 - \sum_k Q_k P_k$: Die Integration v. t_1 zu t_2 und Variation liefert für die linke Seite von (10) Null $\curvearrowright$ dasselbe muss für rechte Seite gelten, also

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \underbrace{\sum_k P_k \dot{Q}_k}_{} - H^*(P_k, Q_k, t) + \frac{dF_2(q_k, P_k, t)}{dt} \underbrace{- \frac{d}{dt} \sum_k Q_k P_k}_{} \right\} \overset{!}{=} 0$$

$$\longrightarrow - \sum_k \dot{P}_k Q_k \longleftarrow$$

$$\curvearrowright 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ - \sum_k (\delta \dot{P}_k Q_k + \dot{P}_k \delta Q_k) - \underbrace{\delta H^*}_{} \right\} + \underbrace{\delta F_2(q_k, P_k, t) \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\substack{\text{i. Allg. } \neq 0, \\ \text{weil nur } q_k(t_1) \\ \text{und } q_k(t_2) \text{ keine} \\ \text{Variation erfahren, wohl} \\ \text{aber } P_k(t_1) \text{ und } P_k(t_2)}}$$

$$\sum_k \left\{ \frac{\partial H^*}{\partial P_k} \delta P_k + \frac{\partial H^*}{\partial Q_k} \delta Q_k \right\} + \frac{\partial H^*}{\partial t} \underbrace{\cancel{\delta t}}_{\equiv 0}$$

Ferner: $$\int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\delta \dot{P}_k}_{\frac{d}{dt}(\delta P_k)} Q_k = \underbrace{Q_k \delta P_k \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\text{i. Allg. } \neq 0} - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{Q}_k \delta P_k$$

$$\rightsquigarrow \quad 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_k \delta P_k \left(\dot{Q}_k - \frac{\partial H^*}{\partial P_k} \right) + \sum_k \delta Q_k \left(-\dot{P}_k - \frac{\partial H^*}{\partial Q_k} \right) \right\}$$

$$+ \Big[- Q_k \delta P_k + \underbrace{\delta F_2(q_k, P_k, t)}_{\frac{\partial F_2}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \delta P_k + \frac{\partial F_2}{\partial t} \underbrace{\delta t}_{=0}} \Big]_{t_1}^{t_2}$$

$$Q_k \overset{(11)}{\longrightarrow} \frac{\partial F_2}{\partial P_k}$$

$$\rightsquigarrow \left[\ldots \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \text{ weil } \delta q_k \text{ an Integrationsgrenzen verschwindet}$$

$$\rightsquigarrow \quad 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_k \delta P_k \left(\dot{Q}_k - \frac{\partial H^*}{\partial P_k} \right) - \sum_k \delta Q_k \left(\dot{P}_k + \frac{\partial H^*}{\partial Q_k} \right) \right\}$$

Wg. der Unabhängigkeit <u>aller</u> P_k und Q_k (d.h. <u>alle</u> δP_k und δQ_k sind <u>frei</u> wählbar, wobei dennoch letzte Gleichung erfüllt sein muss) folgt, dass alle Klammern in den Summen jeweils gleich Null sein müssen, also:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H^*}{\partial P_k} \quad \text{und} \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_k}$$

Wir erhalten also wieder die kanonischen Gleichungen!

$\rightsquigarrow$ F_2 ist die Erzeugende der kanonischen Transformation $(p_k, q_k) \to (P_k, Q_k)$ mit

$$\boxed{H^*(P_k, Q_k, t) = H(p_k, q_k, t) + \frac{\partial F_2(q_k, P_k, t)}{\partial t}} \quad (12)$$

(Lässt sich ebenso für F_1, F_3 und F_4 zeigen)

w.z.z.w.

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Hamilton – Jacobi – Verfahren

Es gilt bekanntlich $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$, also die kanonischen Gleichungen.

a) Ferner: Gilt $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, also $H = H(q_k, p_k)$, und gelingt eine kanonische Transformation (vermittels einer Erzeugenden F) $(q_k, p_k) \to (Q_k, P_k)$ derart, dass $H(q_k, p_k) \to H^*(P_k)$, also alle Q_k zyklisch, dann folgt wegen $\dot{P}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_k} = 0 \curvearrowright P_i = \alpha_i = \text{const.}$, also jetzt $H^* = H^*(\alpha_i)$, wegen $\dot{Q}_i = \frac{\partial H^*}{\partial P_i} = \frac{\partial H^*}{\partial \alpha_i} =: \omega_i = \text{const}$.

$\curvearrowright Q_i = \omega_i t + \beta_i \to$ besonders einfache Lösung!

b) Noch besser: Transformation derart, dass sowohl Q_i als auch P_i sämtlich zyklisch, also

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_i} \overset{!}{=} 0 \quad \underline{\text{und}} \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H^*}{\partial P_i} \overset{!}{=} 0, \tag{13}$$

wobei wir für diesen Fall als Erzeugende z.B. (geht auch anders) $F_2(q_i, P_i, t)$ wählen und ihr das Formelzeichen $S = S(q_i, P_i, t)$ geben wollen. S heißt dann „Hamiltonsche Wirkungsfunktion", wie noch zu begründen sein wird. (13) gilt trivialerweise, wenn

$$H^* = H + \frac{\partial S}{\partial t} \overset{!}{=} 0 \tag{14}$$

gilt, was wir hiermit von S fordern. Dann folgt aus (13) bzw. (14):

$$P_i = \alpha_i = \text{const.} \quad \underline{\text{und}} \quad Q_i = \beta_i = \text{const.} \tag{15}$$

Wg. (11) gilt $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ und $Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$ und damit:

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = \boxed{H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \tag{16}$$

Hamilton-Jacobische-Dgl. = HJD

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

(16) heißt „Hamilton-Jacobische-Dgl." und ist eine partielle, nichtlineare Dgl. zur Bestimmung von $S = S(q_i, P_i, t)$.

Vorteil des Ansatzes (14) gegenüber einfach nur (13): H darf hier explizit von der Zeit abhängen, ohne dass dies die Lösung prinzipiell erschwert.

Physikalische Bedeutung der HJD-Lösung $S(q_i, P_i, t)$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{(tot. Differential)}$$

Wg. (11) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$ und wg. (13) $\dot{P}_i = 0 \; \forall i$;

ferner wg. (14): $H = -\frac{\partial S}{\partial t}$

$$\curvearrowright \frac{dS}{dt} = \sum_i \dot{q}_i p_i - H \overset{(1)}{=} L$$

↳ Lagrange-Funktion

Integration ergibt:

$$S = \int L \cdot dt + \text{const.}$$

Andererseits: $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$ = Wirkungsfunktional

$\curvearrowright$ || Lösung S der HJD ist gleich dem unbestimmten Wirkungsintegral! } daher auch Bezeichnung „Hamiltonsche Wirkungsf."

Anmerkung: Während $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \neq S(t)$, ist

$$S = \int L\,dt + \text{const.} = S(q_i, t)$$

(eigentlich $S(q_i, P_i, t)$, aber wg. $H^* = 0$ und damit $-\frac{\partial H^*}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0 \curvearrowright P_i = \alpha_i = \text{const.}$)

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Anwendung der HJD für a) $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$ und $H = T + V = E$ (also nur holonom-skleronome Zwangsbed.)

Aus (16) wird jetzt

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = E + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad (17)$$

$\curvearrowright$ $\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \equiv 0$ bzw. $\frac{\partial S}{\partial t} \neq f(t)$, d.h. S muss linear von t abhängen, wobei aus (17) folgt:

$$S(q_i, t) = -E \cdot t + \underbrace{\text{const.}}_{\text{const. bzgl. explizit } t\text{-Abhängigkeit}}(q_i)$$

bzw.

$$S(q_i, t) =: \underbrace{W(q_i)}_{\text{„verkürzte" Wirkungsfunktion}} - E \cdot t \qquad (18)$$

Eingesetzt in (17):

$$\boxed{H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = E} \qquad (19)$$

= „verkürzte" HJD

Spezialfall: Mechanisches System reduziert sich auf einen Massepunkt im Potentialfeld

$\curvearrowright$ $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$; d.h. $\vec{r} \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ferner: $H = E = T + V = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V(\vec{r})$

$$= \frac{1}{2m} m^2 \vec{v}^2 + V(\vec{r})$$

$$= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

(weil H eine Funktion der Orte q_i bzw. $\vec{r}$ und der Impulse p_i bzw. $\vec{p}$ sein soll)

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Mit $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ (bzw. $\frac{\partial W}{\partial q_i}$) (vgl. (11))

oder hier $p_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \ldots$ (bzw. $\frac{\partial W}{\partial x}, \ldots$)

und $\vec{p}^{\,2} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ (in kart. Koord.)

folgt aus (16) (bzw. (19)):

$$\frac{1}{2m}\underbrace{\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]}_{(\vec\nabla S)^2} + V = -\frac{\partial S}{\partial t} \qquad (20a)$$

aus (19)
↓
bzw. $$\frac{1}{2m}(\vec\nabla W)^2 + V = E \quad (\text{mit } \vec\nabla S = \vec\nabla W) \qquad (20b)$$

Forts. S. 18

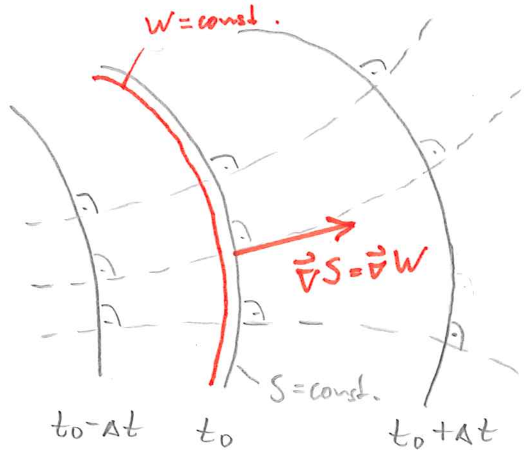
Einschub: Interpretation von (18) (wäre besser direkt nach (18) gekommen)

$S(q_i,t) = W(q_i) - E\cdot t$ kann als Welle interpretiert werden bzw. als Phase einer Welle.

Phasengeschw.

(Erinnerung: Welle hat die Form $\phi(r,t) = f(r \pm u\cdot t)$
oder $\phi(\vec r,t) = \phi_0(\vec r)\, e^{i(\vec k\vec r \pm \omega t)}$ oder ...):

Bei festem $t = t_0$ und $S(q_i,t_0) = W(q_i) - E\,t_0 \overset{!}{=} \text{const.}$ ist (18) eine Flächengleichung im Raum, welche sich mit änderndem t_0 nicht nur verschiebt, sondern auch verformt (weil $q_i = q_i(t)$ bzw. $q_i(t_0)$):



Erläuterung: Wg. $S(\vec r) = \text{const.}$ (z.B. $S(\vec r) = \vec r^{\,2} = \text{const.} \Rightarrow$ Kugelfläche) gilt

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \ldots = d\vec r \cdot \mathrm{grad}\, S,$$

also Änderung v. dS bei Änderung um $d\vec r \Rightarrow dS \equiv 0$ bei $d\vec r \perp \mathrm{grad}\, S$ $\Rightarrow$ grad S $\perp$ auf Fläche S = const. u. wg. $\vec\nabla S = \vec\nabla W$ sind W = const. $\uparrow\uparrow$ zu S-Flächen.

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Phasengeschwindigkeit $\vec{u}$ der S-Welle: Wir „setzen" uns auf die Welle (wie ein Surfer, der im Idealfall immer auf derselben Wellenhöhe ist, also eine konstante Phase wahrnimmt), nehmen also $S = \text{const.}$ im Zeitintervall dt wahr bzw.

Verschiebung in Wellenausbreitungsrichtung

$$dS \overset{!}{=} 0 = -E\,dt + d\vec{r}\,(\vec{\nabla} W) = -E\,dt + \vec{\nabla} W \cdot \vec{u}\,dt$$

(21) $\curvearrowright \quad \vec{\nabla} W \cdot \vec{u} = E \quad$ bzw. $\quad |\vec{u}| = \dfrac{|E|}{|\vec{\nabla} W|}$ (weil $\vec{u} \perp W = \text{const.}$)

Andererseits gilt $\dfrac{\partial S}{\partial q_i} = \dfrac{\partial W}{\partial q_i} \left(= \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) = p_i$,

also $\vec{p} = \vec{\nabla} W = m \cdot \vec{v}$ mit $\vec{v}$ = Teilchengeschwindigkeit, mithin

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{E}{m}} \quad \text{mit } \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \text{ oder } \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v} \qquad (22)$$

Phasengeschwindigkeit   Teilchengeschw.

Grenzfälle: a) $E = T + V = T$ (kein Potential = freies Teilchen)

$$\curvearrowright \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\frac{1}{2} m \vec{v}^2}{m}$$

$$\curvearrowright \quad u = \frac{v}{2}$$

b) $E = V$ (d.h. $T = 0$, also $v = 0$ bei $m = \text{const.}$)

$$\curvearrowright \quad u \to \infty$$

Fazit: Teilchen kann über Geschwindigkeit $\vec{v}$ (bzw. Impuls $\vec{p}$) beschrieben werden (der gebräuchliche Weg) oder alternativ (aber völlig gleichberechtigt) als Welle mit der Phase S und der Phasengeschwindigkeit $\vec{u}$, wobei (22) gilt!

Bereits seit 1. Hälfte des 19. Jahrhunderts bekannt, dann aber ca. 100 Jahre unbeachtet geblieben

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Forts. v. S. 16:

Vergleich zwischen (20a) und (20b) mit $\vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S$:

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} = -E} \tag{23}$$

Aus (20b):

$$(\vec{\nabla} W)^2 = 2m(E-V)$$

Andererseits aus (22):

$$u^2 = \frac{E^2}{m^2 v^2} = \frac{E^2}{2m \frac{1}{2} m v^2} = \frac{E^2}{2mT} = \frac{E^2}{2m(E-V)}$$

Nach $2m(E-V)$ aufgelöst und in vorletzte Gleichung eingesetzt:

$$(\vec{\nabla} W)^2 = \frac{E^2}{u^2}$$

(20a)

$$\curvearrowright \quad \boxed{(\vec{\nabla} S)^2 = \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2} \tag{24}$$

Diese Gleichung ist identisch mit (9a), also dem erweiterten Winkeleikonal!

Fazit: Wählt man (vgl. (22)) für die klassische Mechanik die Wellendarstellung gemäß (24), dann ist dies <u>identisch</u> mit den Gesetzmäßigkeiten der geometrischen Optik!

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Die Wellenmechanik

Idee von Schrödinger:

Wenn klassische Teilchenbewegung auch über (24) beschrieben werden kann und (24) identisch mit der Eikonalgleichung ist, gibt es dann zu (24) eine (Art) Wellengleichung, so wie zu (9) Gleichung (76)? (induziert durch de Broglie)

(M. a. W.: Ist die klassische Mechanik nur der Grenzfall einer unbekannten Wellenmechanik für $\lambda \to 0$ (was immer λ in diesem Zusammenhang sein soll), analog zu dem Übergang zwischen el.-magn. Wellenausbreitung und geom. Optik?)

Wir versuchen, Analogien herzustellen:

klassische Mechanik	geometrische Optik
$S(\vec{r},t) \overset{(18)}{=} W(\vec{r}) - E \cdot t$	Phase $P(\vec{r},t) \overset{(96)}{=} k_0 \cdot \underset{\text{Eikonal}}{L(\vec{r})} - k_0 \cdot c \cdot t$
mit $\dfrac{\partial S}{\partial t} \overset{(23)}{=} -E$	$\curvearrowright$ $\dfrac{\partial P}{\partial t} = -k_0 c = -\dfrac{2\pi}{\lambda_0} c = -\dfrac{2\pi f}{c} \cdot c = -\omega$
und $\vec{\nabla} W \overset{(204)}{=} \vec{\nabla} S \overset{(11)}{=} \vec{p}$	bzw. $\vec{\nabla} P = k_0 \vec{\nabla} L \overset{(9)}{=} \underbrace{\underbrace{k_0 \cdot n}_{k} \cdot \vec{e}_{\text{Ausbreitungsricht.}}}_{\vec{k}}$

Ansatz: Proportionalitäten angenommen

$$E \sim \omega$$
$$\vec{p} \sim \vec{k}$$

Aus naheliegenden Gründen (Max Planck, 1900, bzw. Einstein, 1905) wählen wir für die erste Gleichung die Proportionalitätskonstante $\hbar$, also $E = \hbar \cdot \omega$.

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Hinsichtlich der zweiten Gleichung gilt dann:

$$u = \lambda \cdot f \Leftrightarrow \lambda = \frac{u}{f} \overset{(22)}{=} \frac{E/p}{E/h} = \frac{h}{p} \quad \text{(de Broglie-Wellenlänge)}$$

Phasengeschw. der Welle, vgl. (7b)

Übergang zur Mechanik

$$\Rightarrow \quad p = \frac{h}{\lambda} = \overbrace{\frac{2\pi}{\lambda}}^{k}\frac{h}{2\pi} = k \cdot \hbar$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} E &= \hbar \cdot \omega \\ \vec{p} &= \hbar \cdot \vec{k} \end{aligned}} \qquad (25)$$

Zwischenrechnung: Was entspricht $n(\vec{r})$ in der Mechanik?

$$p = \hbar \cdot k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \frac{2\pi f}{u} = \hbar \frac{\omega}{c} n = m \cdot v \; (= p)$$

$$\Rightarrow \quad m \cdot v = n \frac{\omega}{c} \hbar = n \cdot \frac{E}{c}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{c}{E} \cdot m \cdot v = \frac{c}{E} \sqrt{m^2 \cdot v^2} = \frac{c}{E} \sqrt{2m \underbrace{\tfrac{1}{2} m v^2}_{T}}$$

$$\Rightarrow \quad n(\vec{r}) = \frac{c}{E} \sqrt{2m\left[E - V(\vec{r})\right]} \qquad (26)$$

$\Rightarrow$ Ansatz Schrödinger, um Wellengleichung zu gewinnen:

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} = \psi_0(\vec{r}) \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

und $$\Delta \psi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$ $\rightarrow$ Schrödinger: „Versuch. Es war nicht einmal klar, ob Dgl. 2. Ordnung."

Mit $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \psi \cdot \left(-i \frac{E}{\hbar}\right)^2 = -\psi \frac{E^2}{\hbar^2}$ und $u = \frac{c}{n}$:

$$\Delta \psi = -\frac{n^2}{c^2} \frac{E^2}{\hbar^2} \psi$$

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Mit (26):

$$\frac{h^2}{c^2}\,\frac{E^2}{\hbar^2} = \frac{\cancel{c^2}}{\cancel{E^2}}\,2m(E-V)\cdot\frac{\cancel{E^2}}{\cancel{c^2}\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)$$

$$\rightsquigarrow \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\,\psi = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi = E\cdot\psi} \qquad (27)$$

Zeitunabhängige Schrödingergleichung

Hamilton-Funktion

Vergleich mit verkürzter HJD (19) $H(\vec{r},\vec{p}) = E$ führt zu

$$\boxed{\hat{H}\,\psi = E\,\psi} \qquad (27a)$$

mit $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$ = „Hamilton-Operator"

(27a) ist also Eigenwertgleichung des Hamilton-Operators.

Anmerkung: (19) angewandt auf Massepunkt im Potentialfeld liefert $H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r})$ (vgl. S. 15)

Hieraus gewinnt man den Hamiltonoperator, indem man formal $\vec{p}$ und $\vec{r}$ durch Operatoren (im Ortsraum, da wir hier mit $\psi(\vec{r},t)$ arbeiten)

$$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_r \qquad (28)$$

und $\hat{\vec{r}} = \vec{r}$

ersetzt: $\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r}) \rightarrow \frac{1}{2m}\,\frac{\hbar^2}{-1}\Delta_r + V(\hat{\vec{r}}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r + V(\hat{\vec{r}})$

↓

vgl. (27)

Prof. Dr. Hartmut Grabinski
Institut für
Mikroelektronische Systeme
Leibniz Universität Hannover

Aus der speziellen Zeitabhängigkeit von $\psi(\vec{r},t)$ gemäß

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r}) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \frac{E}{\hbar}t)}$$

lässt sich ein Operator für die Energie E extrahieren:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi \left(-i\frac{E}{\hbar}\right)$$

$\curvearrowright$ (29) $\quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad$ (d.h. $i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$ „liefert" $E \cdot \psi$)

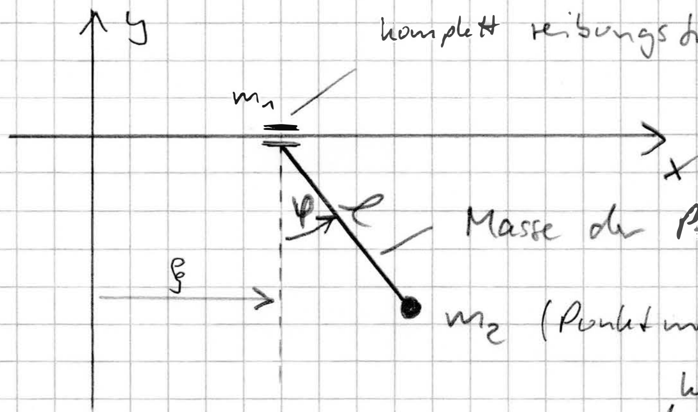
Angewandt auf (27a) ergibt die „zeitabhängige Schrödingergleichung":

$$\boxed{\hat{H}\,\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi} \qquad (27b)$$

Grabinski, 14.12.12

Übung: Lagrange-Funktion u. Eulersche Dgl.

Anwendung auf ebenes Pendel mit Schiene:



kin. Energie

pot. Energie

Lagrange-Funktion: $\quad L = T - U$

Bestimmung von T u. U:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}^2, \quad U_1 = 0 \quad (\text{bezogen auf } y = 0)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$x = \xi + l \cdot \sin\varphi \quad \Rightarrow \dot{x} = \dot{\xi} + l \cdot \dot{\varphi} \cos\varphi$$

$$y = -l \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \dot{y} = +l \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi$$

$$\leadsto \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\xi}^2 + 2 l \dot{\xi} \dot{\varphi} \cos\varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi$$

$$\leadsto T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\xi}^2 + 2 l \dot{\xi} \dot{\varphi} \cos\varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \right)$$

$$U_2 = -m_2 \cdot g \cdot l \cdot \cos\varphi$$

$$\leadsto \boxed{L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{\xi} \dot{\varphi} \cos\varphi \right) + m_2 \cdot g \cdot l \cdot \cos\varphi}$$

d.h. verallgemeinerte Koordinaten q hier ξ und φ (2 Freiheitsgrade), also

$$L(q, \dot{q}, t) = L(\underbrace{\xi, \varphi}_{q}, \underbrace{\dot{\xi}, \dot{\varphi}}_{\dot{q}}) \quad (t \text{ kommt nicht explizit vor})$$

(2)

Grabinski, 14.12.12

Euler DGL.: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ (allg.)

<u>hier:</u> 2 Gleichungen (wg. $f=2$ Freiheitsgrade)

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}}_{(m_1+m_2)\dot{\xi} + m_2 l \dot{\varphi}\cos\varphi} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \xi}}^{0} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{\xi}\cos\varphi$$

$$-m_2 l \dot{\xi}\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 g l \sin\varphi$$

$\leadsto \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}} \dots \ddot{\xi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \dots \dot{\varphi} + \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \dots \ddot{\varphi}$ (L hier Funktion von 3 Variablen)

$$= (m_1+m_2)\ddot{\xi} - m_2 \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + m_2 l \cos\varphi \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\leadsto \boxed{(m_1+m_2)\ddot{\xi} + m_2 l \ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = 0} \quad (*)$$

1. Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \underset{\text{wie oben}}{\dots} = m_2 l \cos\varphi\, \ddot{\xi} - m_2 l \dot{\xi}\sin\varphi\, \dot{\varphi} + m_2 l^2 \ddot{\varphi}$$

$$\leadsto m_2 l \ddot{\xi}\cos\varphi - \cancel{m_2 l \dot{\xi}\dot{\varphi}\sin\varphi} + m_2 l^2 \ddot{\varphi} + \cancel{m_2 l \dot{\xi}\dot{\varphi}\sin\varphi} + m_2 g l \sin\varphi = 0$$

$$\leadsto \boxed{\cancel{m_2}\cancel{l}\,\ddot{\xi}\cos\varphi + \cancel{m_2}\, l^{\cancel{2}}\, \ddot{\varphi} + \cancel{m_2}\, g\, \cancel{l}\, \sin\varphi = 0} \quad (**)$$

2. Bewegungsgleichung

ges.: $\xi(t)$, $\varphi(t)$

Diskussion: $m_1 \to \infty \quad \leadsto \ddot{\xi} = 0$ (aus (*))

$$\leadsto \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \quad \text{(Pendel)}$$

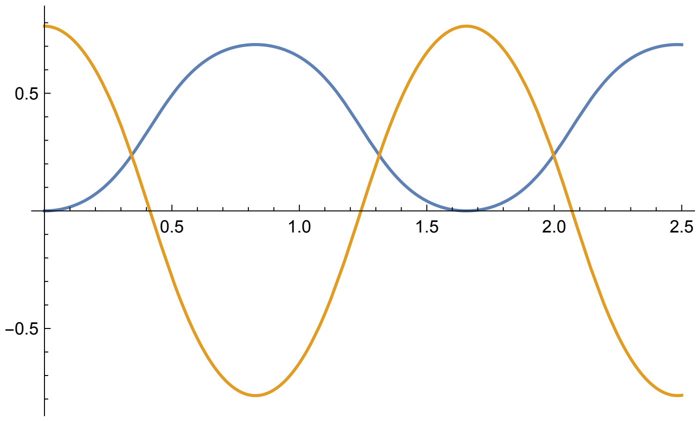
kleine Auslenkung: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi \approx 0$

Lösung Dgls. ebenes Pendel mit Schiene

m1 = m2

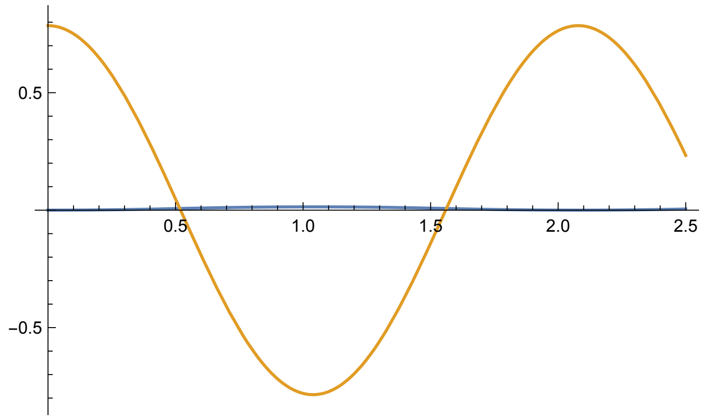
In[1]:=
```
m1 = 1;
m2 = 1;
l = 1;
g = 9.81;
T = 2.5;
s = NDSolve[{(m1 + m2) ξ''[t] + m2 l φ''[t] Cos[φ[t]] - m2 l φ'[t]^2 Sin[φ[t]] == 0,
    m2 l ξ''[t] Cos[φ[t]] + m2 l^2 φ''[t] + m2 g l Sin[φ[t]] == 0,
    ξ[0] == ξ'[0] == 0, φ[0] == Pi / 4, φ'[0] == 0}, {ξ, φ}, {t, 0, T}];
Plot[Evaluate[{ξ[t], φ[t]} /. s], {t, 0, T}]
m1 =.
m2 =.
l =.
g =.
T =.
```

Out[7]=



m1 >> m2 (Pendel praktisch nicht verschiebbar)

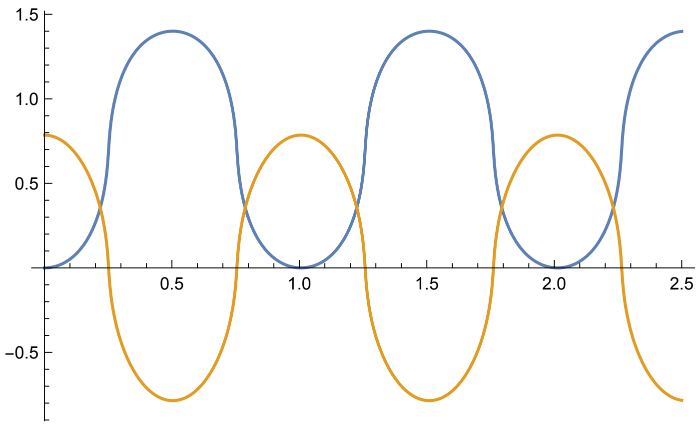
In[13]:=
```
m1 = 1;
m2 = .01;
l = 1;
g = 9.81;
T = 2.5;
s = NDSolve[{(m1 + m2) ξ''[t] + m2 l φ''[t] Cos[φ[t]] - m2 l φ'[t]^2 Sin[φ[t]] == 0,
    m2 l ξ''[t] Cos[φ[t]] + m2 l^2 φ''[t] + m2 g l Sin[φ[t]] == 0,
    ξ[0] == ξ'[0] == 0, φ[0] == Pi / 4, φ'[0] == 0}, {ξ, φ}, {t, 0, T}];
Plot[Evaluate[{ξ[t], φ[t]} /. s], {t, 0, T}]
m1 =.
m2 =.
l =.
g =.
T =.
```

Out[19]=


m1 << m2

In[25]:=
```
m1 = .01;
m2 = 1;
l = 1;
g = 9.81;
T = 2.5;
s = NDSolve[{(m1 + m2) ξ''[t] + m2 l φ''[t] Cos[φ[t]] - m2 l φ'[t]^2 Sin[φ[t]] == 0,
    m2 l ξ''[t] Cos[φ[t]] + m2 l^2 φ''[t] + m2 g l Sin[φ[t]] == 0,
    ξ[0] == ξ'[0] == 0, φ[0] == Pi / 4, φ'[0] == 0}, {ξ, φ}, {t, 0, T}];
Plot[Evaluate[{ξ[t], φ[t]} /. s], {t, 0, T}]
m1 =.
m2 =.
l =.
g =.
T =.
```

Out[31]=

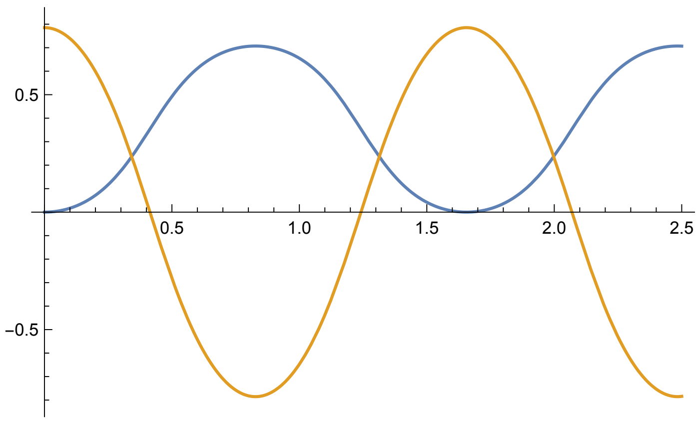


Fourieranalyse

m1 = m2

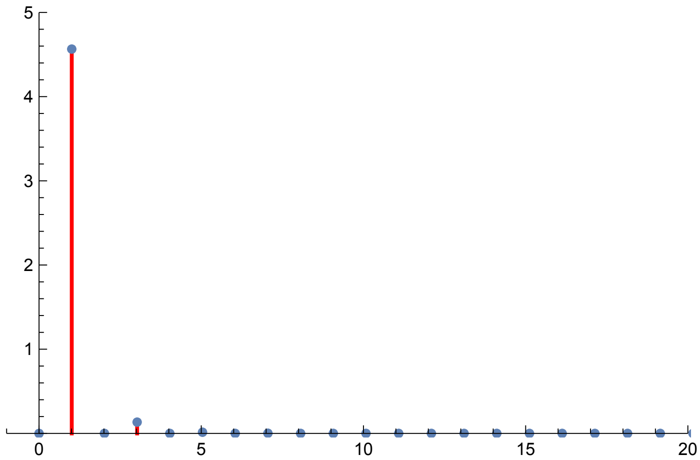
In[37]:=
```
m1 = 1;
m2 = 1;
l = 1;
g = 9.81;
T = 2.5;
ksi = NDSolve[{(m1 + m2) ξ''[t] + m2 l φ''[t] Cos[φ[t]] - m2 l φ'[t]^2 Sin[φ[t]] == 0,
        m2 l ξ''[t] Cos[φ[t]] + m2 l^2 φ''[t] + m2 g l Sin[φ[t]] == 0, ξ[0] == ξ'[0] == 0,
        φ[0] == Pi / 4, φ'[0] == 0}, {ξ, φ}, {t, 0, T}][[1]][[1]][[2]];
phi = NDSolve[{(m1 + m2) ξ''[t] + m2 l φ''[t] Cos[φ[t]] - m2 l φ'[t]^2 Sin[φ[t]] == 0,
        m2 l ξ''[t] Cos[φ[t]] + m2 l^2 φ''[t] + m2 g l Sin[φ[t]] == 0, ξ[0] == ξ'[0] == 0,
        φ[0] == Pi / 4, φ'[0] == 0}, {ξ, φ}, {t, 0, T}][[1]][[2]][[2]];
Plot[{ksi[t], phi[t]}, {t, 0, T}]
Y = FindMaximum[phi[t], {t, 1.1}][[2]][[1]][[2]]
ListPlot[Abs[Fourier[Table[phi[t], {t, Y/128, Y, Y/128}]]],
  Filling → Axis, FillingStyle → Directive[Red, Thick],
  PlotRange → {{-1, 20}, {0, 5}}, DataRange → {0, 128}]
ListPlot[Abs[Fourier[Table[ksi[t], {t, Y/128, Y, Y/128}]]],
  Filling → Axis, FillingStyle → Directive[Blue, Thick],
  PlotRange → {{-1, 20}, {0, 5}}, DataRange → {0, 128}]
m1 =.
m2 =.
l =.
g =.
T =.
Y =.
```

Out[44]=

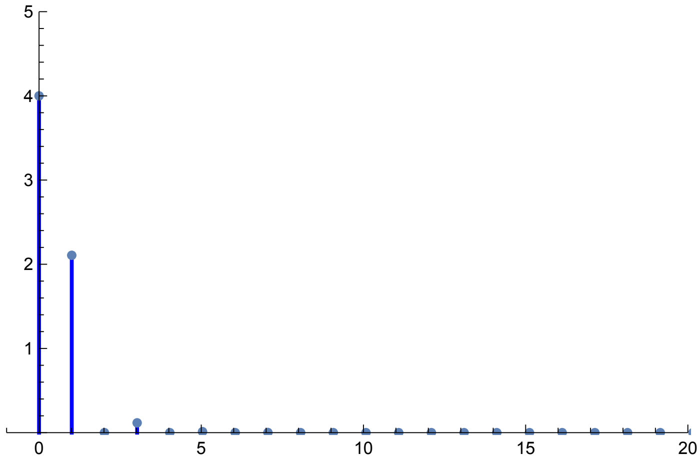


Out[45]= 1.65551

Out[46]=



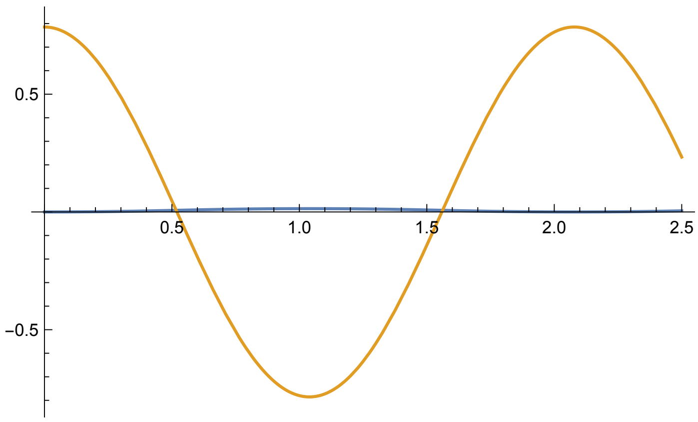
Out[47]=



m1 >> m2 (Pendel praktisch nicht verschiebbar)

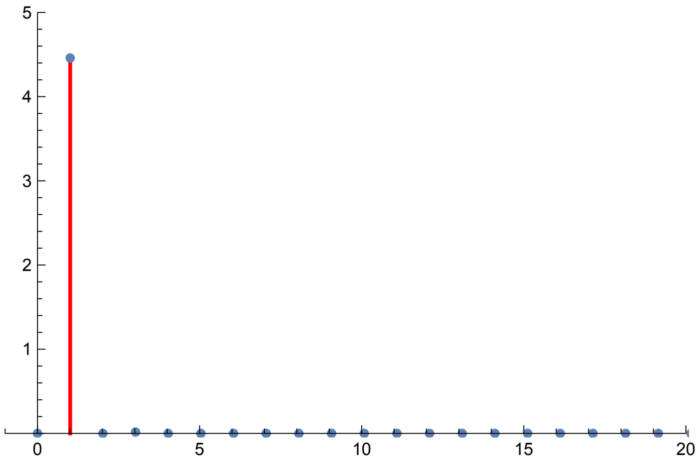
In[54]:=
```
m1 = 1;
m2 = .01;
l = 1;
g = 9.81;
T = 2.5;
ksi = NDSolve[{(m1 + m2) ξ''[t] + m2 l φ''[t] Cos[φ[t]] - m2 l φ'[t]^2 Sin[φ[t]] == 0,
      m2 l ξ''[t] Cos[φ[t]] + m2 l^2 φ''[t] + m2 g l Sin[φ[t]] == 0, ξ[0] == ξ'[0] == 0,
      φ[0] == Pi / 4, φ'[0] == 0}, {ξ, φ}, {t, 0, T}][[1]][[1]][[2]];
phi = NDSolve[{(m1 + m2) ξ''[t] + m2 l φ''[t] Cos[φ[t]] - m2 l φ'[t]^2 Sin[φ[t]] == 0,
      m2 l ξ''[t] Cos[φ[t]] + m2 l^2 φ''[t] + m2 g l Sin[φ[t]] == 0, ξ[0] == ξ'[0] == 0,
      φ[0] == Pi / 4, φ'[0] == 0}, {ξ, φ}, {t, 0, T}][[1]][[2]][[2]];
Plot[{ksi[t], phi[t]}, {t, 0, T}]
Y = FindMaximum[phi[t], {t, 1.1}][[2]][[1]][[2]]
ListPlot[Abs[Fourier[Table[phi[t], {t, Y/128, Y, Y/128}]]],
 Filling → Axis, FillingStyle → Directive[Red, Thick],
 PlotRange → {{-1, 20}, {0, 5}}, DataRange → {0, 128}]
ListPlot[Abs[Fourier[Table[ksi[t], {t, Y/128, Y, Y/128}]]],
 Filling → Axis, FillingStyle → Directive[Blue, Thick],
 PlotRange → {{-1, 20}, {0, .1}}, DataRange → {0, 128}]
m1 =.
m2 =.
l =.
g =.
T =.
Y =.
```

Out[61]=

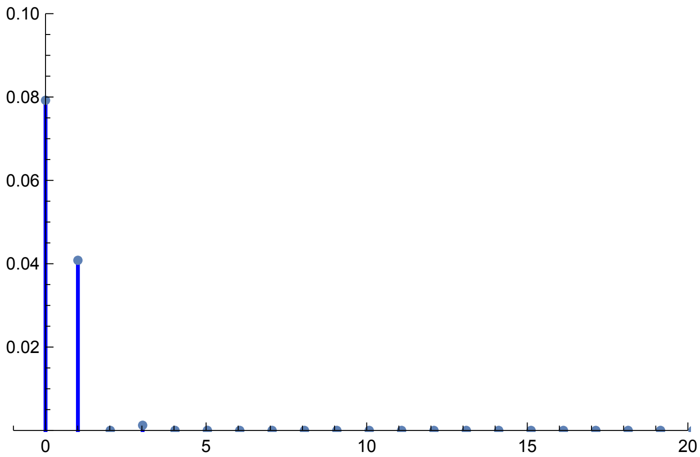


Out[62]= 2.07866

Out[63]=



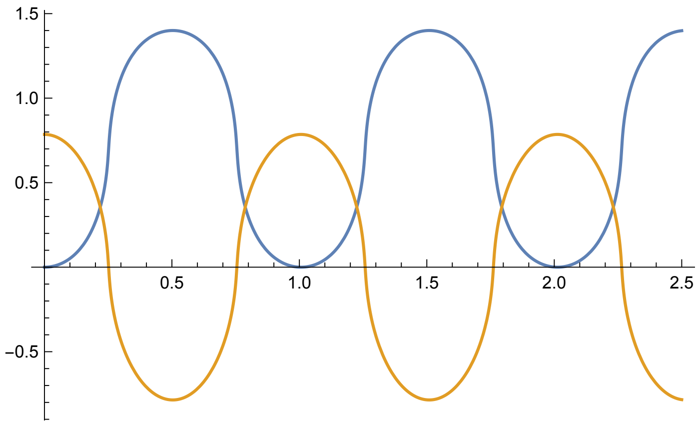
Out[64]=



m1 << m2

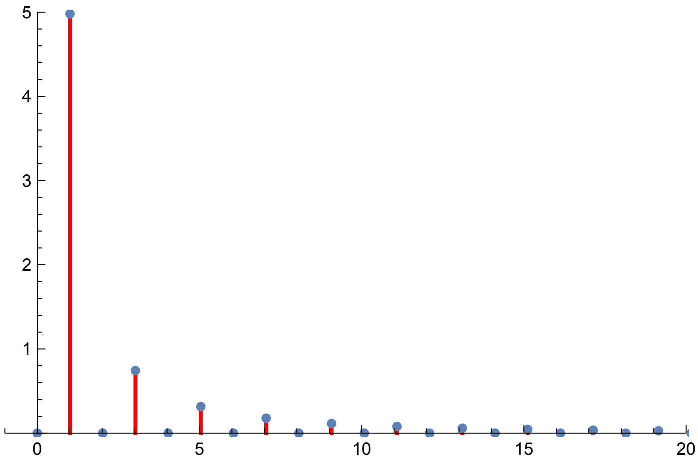
In[71]:=
```
m1 = .01;
m2 = 1;
l = 1;
g = 9.81;
T = 2.5;
ksi = NDSolve[{(m1 + m2) ξ''[t] + m2 l φ''[t] Cos[φ[t]] - m2 l φ'[t]^2 Sin[φ[t]] == 0,
      m2 l ξ''[t] Cos[φ[t]] + m2 l^2 φ''[t] + m2 g l Sin[φ[t]] == 0, ξ[0] == ξ'[0] == 0,
      φ[0] == Pi / 4, φ'[0] == 0}, {ξ, φ}, {t, 0, T}][[1]][[1]][[2]];
phi = NDSolve[{(m1 + m2) ξ''[t] + m2 l φ''[t] Cos[φ[t]] - m2 l φ'[t]^2 Sin[φ[t]] == 0,
      m2 l ξ''[t] Cos[φ[t]] + m2 l^2 φ''[t] + m2 g l Sin[φ[t]] == 0, ξ[0] == ξ'[0] == 0,
      φ[0] == Pi / 4, φ'[0] == 0}, {ξ, φ}, {t, 0, T}][[1]][[2]][[2]];
Plot[{ksi[t], phi[t]}, {t, 0, T}]
Y = FindMaximum[phi[t], {t, .8}][[2]][[1]][[2]]
ListPlot[Abs[Fourier[Table[phi[t], {t, Y/128, Y, Y/128}]]],
 Filling → Axis, FillingStyle → Directive[Red, Thick],
 PlotRange → {{-1, 20}, {0, 5}}, DataRange → {0, 128}]
ListPlot[Abs[Fourier[Table[ksi[t], {t, Y/128, Y, Y/128}]]],
 Filling → Axis, FillingStyle → Directive[Blue, Thick],
 PlotRange → {{-1, 20}, {0, 8}}, DataRange → {0, 128}]
m1 =.
m2 =.
l =.
g =.
T =.
Y =.
```

Out[78]=



Out[79]= 1.00643

Out[80]=



Out[81]=