„Von der Mechanik zur Quantenmechanik“

oder

„Wurde die Quantenmechanik schon 100 Jahre früher begründet?“

A. M. & H. Grabinski

Leibniz Universität Hannover

Übersicht

1. Warum Quantenmechanik? – Historie
2. „Licht und Lichtstrahlen“ oder „Was ist ein Eikonal?“
3. Die Schwierigkeit mit Newtons Mechanik
4. Deshalb: Lagrange-Mechanik
5. Hamilton-Mechanik und das Hamilton-Jacobi-Verfahren: Besser als Lagrange?
6. Von Hamilton zu Schrödinger
7. Resultate und Zusammenfassung

Übersicht

1. Warum Quantenmechanik? – Historie
2. „Licht und Lichtstrahlen“ oder „Was ist ein Eikonal?“
3. Die Schwierigkeit mit Newtons Mechanik
4. Deshalb: Lagrange-Mechanik
5. Hamilton-Mechanik und das Hamilton-Jacobi-Verfahren: Besser als Lagrange?
6. Von Hamilton zu Schrödinger
7. Resultate und Zusammenfassung

Warum Quantenmechanik?

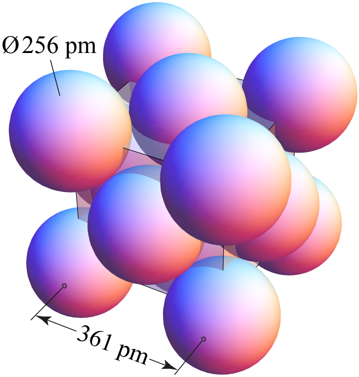
Leibniz Universität Hannover

Beispiele aus der **Elektrotechnik**:

Warum Quantenmechanik?

Beispiele aus der **Elektrotechnik**:

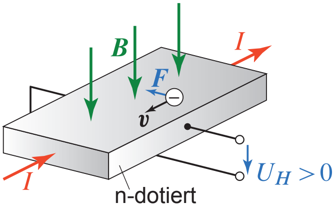
1. Elektrische Leitfähigkeit



Warum Quantenmechanik?

Beispiele aus der **Elektrotechnik** (Forts.):

2. Hall-Effekt (basierend auf Lorentz-Kraft $\vec{F} = Q\ \vec{v} \times \vec{B}$)

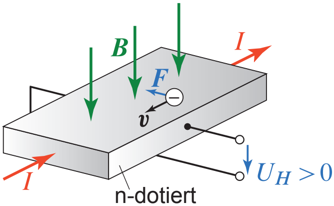


Hallspannung bei n-dotiertem Silizium

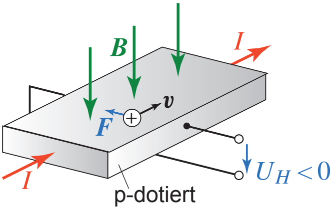
Warum Quantenmechanik?

Beispiele aus der **Elektrotechnik** (Forts.):

2. Hall-Effekt (basierend auf Lorentz-Kraft $\vec{F} = Q\ \vec{v} \times \vec{B}$)



Hallspannung bei n-dotiertem Silizium



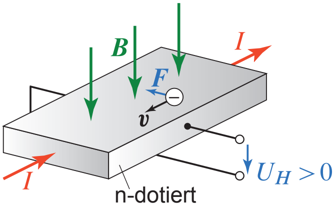
Hallspannung bei p-dotiertem Silizium

Warum Quantenmechanik?

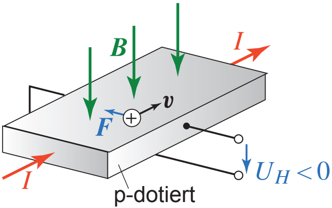
Leibniz Universität Hannover

Beispiele aus der **Elektrotechnik** (Forts.):

2. Hall-Effekt (basierend auf Lorentz-Kraft $\vec{F} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$)



Hallspannung bei n-dotiertem Silizium



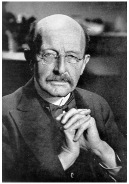
Hallspannung bei p-dotiertem Silizium

Allgemein in der **Physik**:

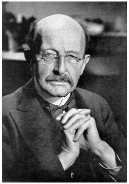
Zwingend notwendig zur befriedigenden Erklärung nahezu sämtlicher physikalischer Effekte auf mikroskopischer Ebene

Historie

Leibniz Universität Hannover

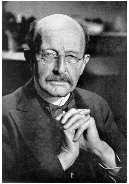


Historie



1900 Max Planck

Historie

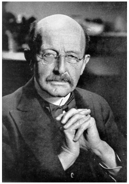


1900 Max Planck

- untersucht spektrale Intensitätsverteilung des schwarzen Strahlers

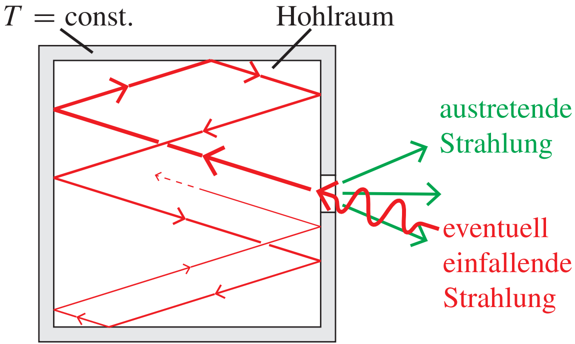
Historie

Leibniz Universität Hannover



1900 Max Planck

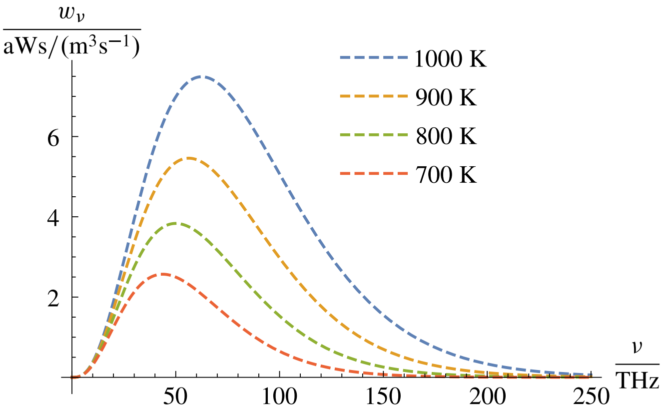
- untersucht spektrale Intensitätsverteilung des schwarzen Strahlers



Historie

Leibniz Universität Hannover

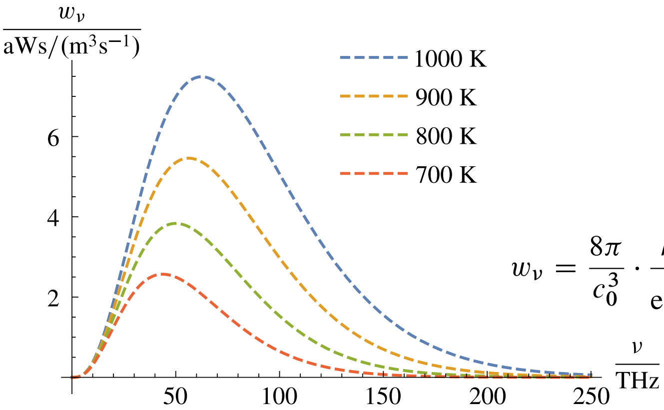
Energiedichte pro Frequenz:



Historie

Leibniz Universität Hannover

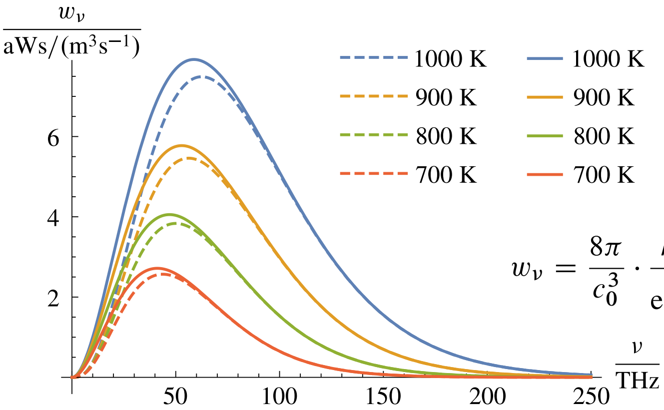
Energiedichte pro Frequenz:



$$w_\nu = \frac{8\pi}{c_0^3} \cdot \frac{h\,\nu^3}{e^{\frac{h\,\nu}{k_B\,T}}}$$

Historie

Energiedichte pro Frequenz:

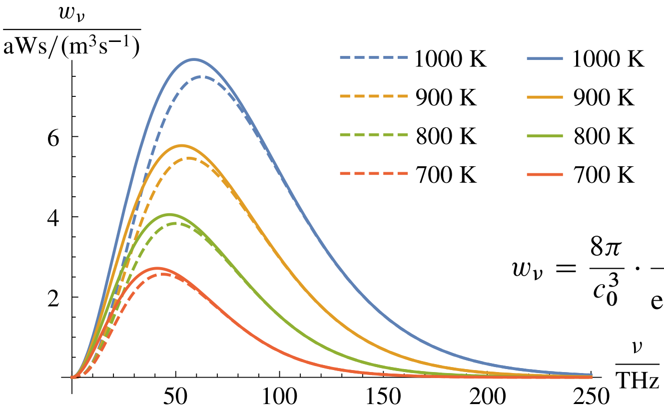


$$w_\nu = \frac{8\pi}{c_0^3} \cdot \frac{h\,\nu^3}{e^{\frac{h\,\nu}{k_B\,T}}}$$

Historie

Leibniz Universität Hannover

Energiedichte pro Frequenz:

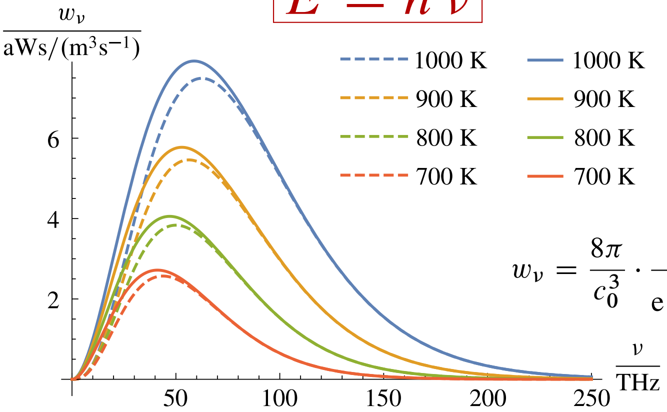


$$w_\nu = \frac{8\pi}{c_0^3} \cdot \frac{h\,\nu^3}{e^{\frac{h\,\nu}{k_B\,T}} - 1}$$

Historie

Energiedichte pro Frequenz:

$$\boxed{E = h\,\nu}$$

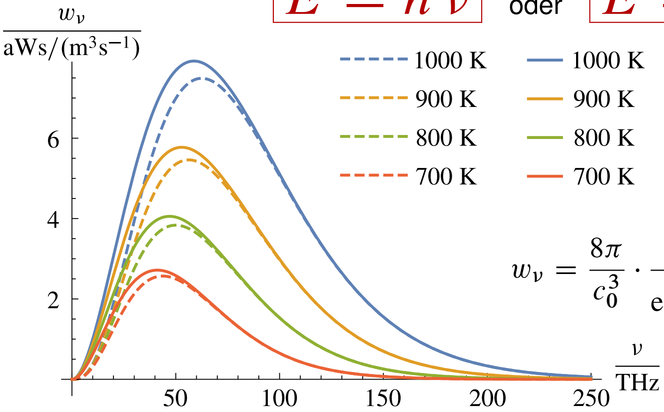


$$w_\nu = \frac{8\pi}{c_0^3} \cdot \frac{h\,\nu^3}{e^{\frac{h\,\nu}{k_B\,T}} - 1}$$

Historie

Energiedichte pro Frequenz:

$$\boxed{E = h\,\nu} \quad \text{oder} \quad \boxed{E = \hbar\,\omega}$$

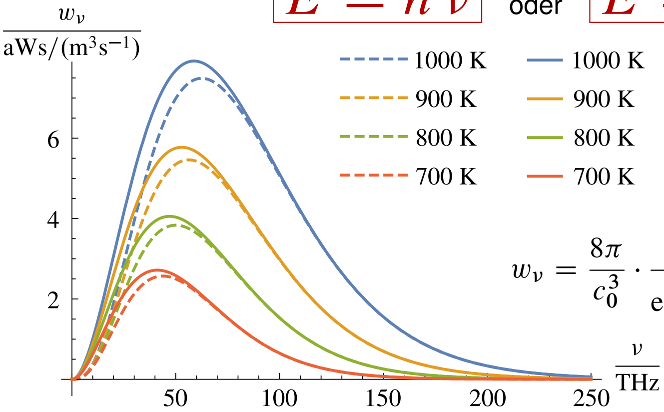


$$w_\nu = \frac{8\pi}{c_0^3} \cdot \frac{h\,\nu^3}{\mathrm{e}^{\frac{h\,\nu}{k_B\,T}} - 1}$$

Historie

Energiedichte pro Frequenz: (mit $h \approx 6,63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Ws}^2$)

$$\boxed{E = h\,\nu} \quad \text{oder} \quad \boxed{E = \hbar\,\omega}$$



$$w_\nu = \frac{8\pi}{c_0^3} \cdot \frac{h\,\nu^3}{e^{\frac{h\,\nu}{k_B\,T}} - 1}$$

Historie

1905 Albert Einstein

Historie

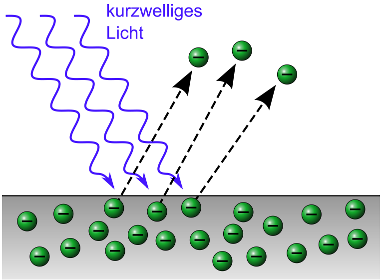
1905 Albert Einstein

- betrachtet Licht als Teilchen und erklärt so den photoelektrischen Effekt

Historie

1905 Albert Einstein

- betrachtet Licht als Teilchen und erklärt so den photoelektrischen Effekt



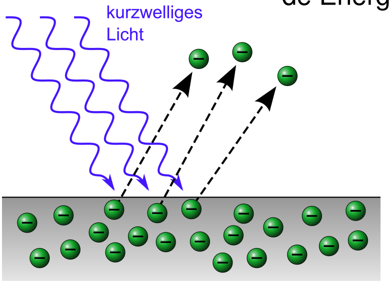
Historie

Leibniz Universität Hannover

1905 Albert Einstein

- betrachtet Licht als Teilchen und erklärt so den photoelektrischen Effekt
- ordnet hierzu – in Anlehnung an Planck – dem einzelnen Lichtteilchen (= Photon) die folgende Energie zu:

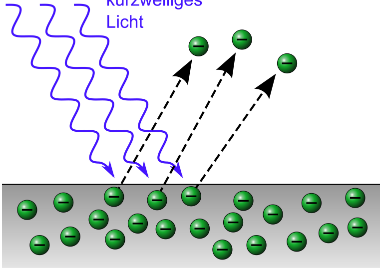
$$\boxed{E = \hbar\,\omega}$$



Historie

1905 Albert Einstein

- betrachtet Licht als Teilchen und erklärt so den photoelektrischen Effekt
- ordnet hierzu – in Anlehnung an Planck – dem einzelnen Lichtteilchen (= Photon) die folgende Energie zu:



$$\boxed{E = \hbar\,\omega}$$

(Einstein liest obige Gleichung hierzu von rechts nach links, d.h. aus der Frequenz ω resultiert die Energie E)

Historie

1913 Niels Bohr

Historie

Leibniz Universität Hannover

1913 Niels Bohr

- entwickelt neues Atommodell

Historie

Leibniz Universität Hannover

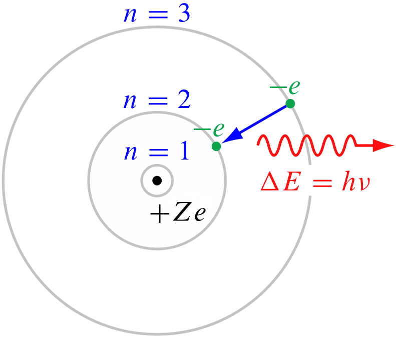
1913 Niels Bohr

- entwickelt neues Atommodell
- legt hierfür klassisch unerklärliche Regeln für »erlaubte« Elektronenbahnen fest

Historie

1913 Niels Bohr

- entwickelt neues Atommodell
- legt hierfür klassisch unerklärliche Regeln für »erlaubte« Elektronenbahnen fest



Historie

1924 Louis de Broglie

Historie

1924 Louis de Broglie

- leitet die Gleichungen $E = \hbar\,\omega$ und $\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$ aus dem Relativitätsprinzip her

Historie

1924 Louis de Broglie

- leitet die Gleichungen $E = \hbar\,\omega$ und $\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$ aus dem Relativitätsprinzip her

$$|\vec{k}| := \frac{2\pi}{\lambda}$$

Historie

Leibniz Universität Hannover

1924 Louis de Broglie

- leitet die Gleichungen $E = \hbar\,\omega$ und $\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$ aus dem Relativitätsprinzip her
- liest diese – im Gegensatz zu Einstein – aber von links nach rechts $\Longrightarrow$ ordnet damit Materie Welleneigenschaften zu

$$|\vec{k}| := \frac{2\pi}{\lambda}$$

Historie

1924 Louis de Broglie

- leitet die Gleichungen $E = \hbar\,\omega$ und $\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$ aus dem Relativitätsprinzip her
- liest diese – im Gegensatz zu Einstein – aber von links nach rechts $\Longrightarrow$ ordnet damit Materie Welleneigenschaften zu

$\Rightarrow$ Wellenlänge der Materie $\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$ aus $|\vec{k}| := \frac{2\pi}{\lambda}$

Historie

1924 Louis de Broglie

- leitet die Gleichungen $E = \hbar\,\omega$ und $\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$ aus dem Relativitätsprinzip her
- liest diese – im Gegensatz zu Einstein – aber von links nach rechts $\Longrightarrow$ ordnet damit Materie Welleneigenschaften zu

$\Rightarrow$ Wellenlänge der Materie $\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$ aus $|\vec{k}| := \frac{2\pi}{\lambda}$

1. Beispiel: Teilchen von $\frac{1}{1000}$ Gramm bewegt sich mit $v = 1\,\frac{\text{Atom } \varnothing}{\text{Sekunde}}$
$\Rightarrow \lambda \approx 7 \cdot 10^{-18}\text{m};$

Historie

1924 Louis de Broglie

- leitet die Gleichungen $E = \hbar\,\omega$ und $\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$ aus dem Relativitätsprinzip her
- liest diese – im Gegensatz zu Einstein – aber von links nach rechts $\Longrightarrow$ ordnet damit Materie Welleneigenschaften zu

$\Rightarrow$ Wellenlänge der Materie $\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$ aus $|\vec{k}| := \frac{2\pi}{\lambda}$

1. Beispiel: Teilchen von $\frac{1}{1000}$ Gramm bewegt sich mit $v = 1\,\frac{\text{Atom}\ \varnothing}{\text{Sekunde}}$
$\Rightarrow \lambda \approx 7 \cdot 10^{-18}\text{m};$
2. Beispiel: Elektron (10^{-27} Gramm) bewegt sich mit $v = 0,3\,\frac{\text{mm}}{\text{Sekunde}}$
$=$ Geschwindigkeit in einem Stromkabel $\Rightarrow \lambda \approx 2\text{m}$

Historie

1926 Erwin Schrödinger

Historie

1926 Erwin Schrödinger

- stellt die später nach ihm benannte Schrödingergleichung auf

Historie

1926 Erwin Schrödinger

- stellt die später nach ihm benannte Schrödingergleichung auf
- schafft damit Plancks und Bohrs Resultaten ein solides wissenschaftliches Fundament

Historie

1926 Erwin Schrödinger

- stellt die später nach ihm benannte Schrödingergleichung auf
- schafft damit Plancks und Bohrs Resultaten ein solides wissenschaftliches Fundament

ca. 1825 William Rowan Hamilton

Historie

1926 Erwin Schrödinger

- stellt die später nach ihm benannte Schrödingergleichung auf
- schafft damit Plancks und Bohrs Resultaten ein solides wissenschaftliches Fundament

ca. 1825 William Rowan Hamilton

- stellt u.a. für Teilchen Bewegungsgleichungen auf, die auch als Wellengleichungen interpretierbar sind – was von der Wissenschaftswelt (beinahe) vergessen wird

Historie

1926 Erwin Schrödinger

- stellt die später nach ihm benannte Schrödingergleichung auf
- schafft damit Plancks und Bohrs Resultaten ein solides wissenschaftliches Fundament

ca. 1825 William Rowan Hamilton

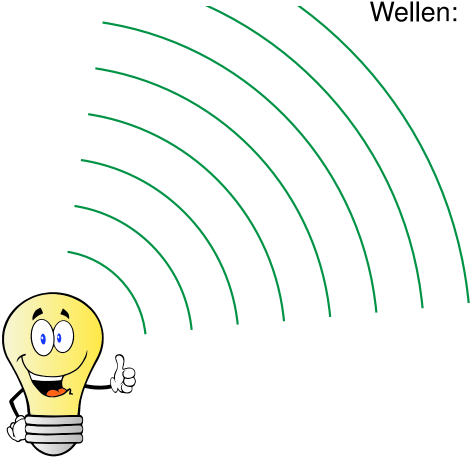
- stellt u.a. für Teilchen Bewegungsgleichungen auf, die auch als Wellengleichungen interpretierbar sind – was von der Wissenschaftswelt (beinahe) vergessen wird

Erst Schrödinger greift Hamiltons Resultate für eine neue Wellenmechanik wieder auf!

Übersicht

1. Warum Quantenmechanik? – Historie
2. „Licht und Lichtstrahlen“ oder „Was ist ein Eikonal?“
3. Die Schwierigkeit mit Newtons Mechanik
4. Deshalb: Lagrange-Mechanik
5. Hamilton-Mechanik und das Hamilton-Jacobi-Verfahren: Besser als Lagrange?
6. Von Hamilton zu Schrödinger
7. Resultate und Zusammenfassung

Wellen oder Strahlen?



Ausbreitung elektromagnetischer Wellen:

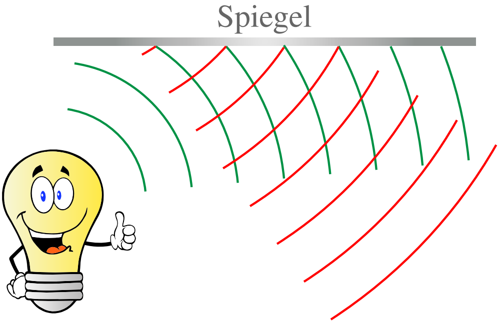
a) im freien Raum

Wellen oder Strahlen?

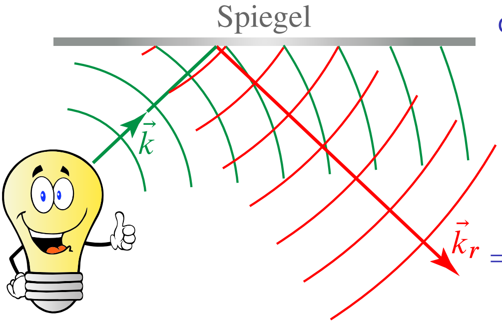
Ausbreitung elektromagnetischer Wellen:

a) im freien Raum

b) mit Reflexion am Spiegel



Wellen oder Strahlen?



Ausbreitung elektromagnetischer Wellen:

a) im freien Raum

b) mit Reflexion am Spiegel

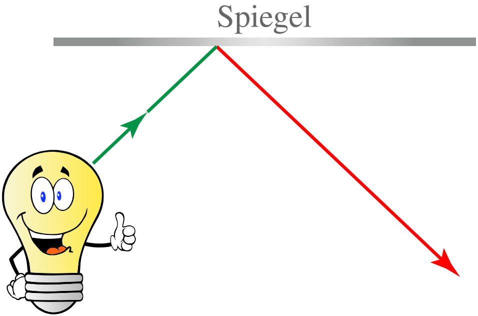
c) mit **Wellenzahlvektor** $\vec{k}$ (bzw. $\vec{k}_r$) und

$$\vec{k} := \frac{2\pi}{\lambda}\,\vec{e}_k$$

(λ = Wellenlänge)

$\Rightarrow$ **Wellen**optik

Wellen oder Strahlen?



Ausbreitung elektromagnetischer Wellen:

a) im freien Raum

b) mit Reflexion am Spiegel

c) mit **Wellenzahlvektor** $\vec{k}$ (bzw. $\vec{k}_r$) und

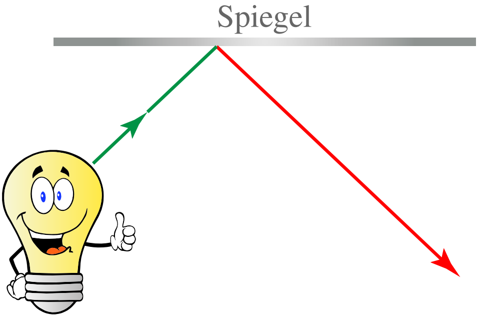
$$\vec{k} := \frac{2\pi}{\lambda}\,\vec{e}_k$$

(λ = Wellenlänge)

$\Rightarrow$ **Wellen**optik

d) **Strahlen**optik

Wellen oder Strahlen?



Ausbreitung elektromagnetischer Wellen:

a) im freien Raum

b) mit Reflexion am Spiegel

c) mit **Wellenzahlvektor** $\vec{k}$ (bzw. $\vec{k}_r$) und

$$\vec{k} := \frac{2\pi}{\lambda}\,\vec{e}_k$$

(λ = Wellenlänge)

$\Rightarrow$ **Wellen**optik

d) **Strahlen**optik

Frage: Wie gelangt man von der **Wellenoptik** zur **Strahlenoptik**?

Wellengleichung oder Eikonal?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung (unmittelbar aus Maxwell-Gleichungen):

$$\Delta\phi(\vec{r},t) - \mu_0\,\epsilon_0\;\mu_r\,\epsilon_r\;\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

Wellengleichung oder Eikonal?

Wellengleichung (unmittelbar aus Maxwell-Gleichungen):

$$\Delta\phi(\vec{r},t) - \underbrace{\mu_0\,\epsilon_0}_{1/c^2}\,\mu_r\,\epsilon_r\,\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

mit Vakuumlichtgeschwindigkeit c

Wellengleichung oder Eikonal?

Wellengleichung (unmittelbar aus Maxwell-Gleichungen):

$$\Delta\phi(\vec{r},t) - \underbrace{\mu_0\,\epsilon_0}_{1/c^2}\,\underbrace{\mu_r\,\epsilon_r}_{n^2}\,\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

mit Vakuumlichtgeschwindigkeit c

Brechungsindex n $(\neq n(\vec{r}))$

Wellengleichung oder Eikonal?

Wellengleichung (unmittelbar aus Maxwell-Gleichungen):

$$\Delta\phi(\vec{r},t) - \underbrace{\mu_0\,\epsilon_0}_{1/c^2}\,\underbrace{\mu_r\,\epsilon_r}_{n^2}\,\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

mit Vakuumlichtgeschwindigkeit c

Brechungsindex n $(\neq n(\vec{r}))$

$\Rightarrow$ Phasengeschwindigkeit $u := c/n$

Wellengleichung oder Eikonal?

Wellengleichung (unmittelbar aus Maxwell-Gleichungen):

$$\Delta\phi(\vec{r},t) - \underbrace{\mu_0\,\epsilon_0}_{1/c^2}\,\underbrace{\mu_r\,\epsilon_r}_{n^2}\,\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

mit Vakuumlichtgeschwindigkeit c

Brechungsindex n ($\neq n(\vec{r})$)

$\Rightarrow$ Phasengeschwindigkeit $u := c/n$

Eine Lösung der Wellengleichung:

$$\phi(\vec{r},t) = \phi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\vec{k}\,\vec{r}-\omega t)}$$

Wellengleichung oder Eikonal?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung (unmittelbar aus Maxwell-Gleichungen):

$$\Delta\phi(\vec{r},t) - \underbrace{\mu_0\,\epsilon_0}_{1/c^2}\,\underbrace{\mu_r\,\epsilon_r}_{n^2}\,\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

mit Vakuumlichtgeschwindigkeit c

Brechungsindex n $(\neq n(\vec{r}))$

$\Rightarrow$ Phasengeschwindigkeit $u := c/n$

Eine Lösung der Wellengleichung:

$$\phi(\vec{r},t) = \phi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\vec{k}\,\vec{r}-\omega t)} \overset{*)}{\overset{\downarrow}{=}} \phi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c}n\,\vec{e}_k\,\vec{r}-\omega t\right)}$$

Wellengleichung oder Eikonal?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung (unmittelbar aus Maxwell-Gleichungen):

$$\Delta\phi(\vec{r},t) - \underbrace{\mu_0\,\epsilon_0}_{1/c^2}\,\underbrace{\mu_r\,\epsilon_r}_{n^2}\,\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

mit Vakuumlichtgeschwindigkeit c

Brechungsindex n $(\neq n(\vec{r}))$

$\Rightarrow$ Phasengeschwindigkeit $u := c/n$

Eine Lösung der Wellengleichung:

$$\phi(\vec{r},t) = \phi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\vec{k}\,\vec{r}-\omega t)} \overset{*)}{\overset{\downarrow}{=}} \phi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c}n\,\vec{e}_k\vec{r}-\omega t\right)}$$

*) mit $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_k$, $\lambda = \frac{u}{f}$ und $u = \frac{c}{n}$

Wellengleichung oder Eikonal?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung (unmittelbar aus Maxwell-Gleichungen):

$$\Delta\phi(\vec{r},t) - \underbrace{\mu_0\,\epsilon_0}_{1/c^2}\,\underbrace{\mu_r\,\epsilon_r}_{n^2}\,\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

mit Vakuumlichtgeschwindigkeit c

Brechungsindex n $(\neq n(\vec{r}))$

$\Rightarrow$ Phasengeschwindigkeit $u := c/n$

Eine Lösung der Wellengleichung:

$$\phi(\vec{r},t) = \phi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\vec{k}\,\vec{r}-\omega t)} \overset{*)}{=} \phi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\underbrace{\left(\frac{\omega}{c}n\,\vec{e}_k\,\vec{r}-\omega t\right)}_{\text{Phase}}}$$

*) mit $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_k$, $\lambda = \frac{u}{f}$ und $u = \frac{c}{n}$

Wellengleichung oder Eikonal?

Leibniz Universität Hannover

Ansatz: Welle bei ortsabhängigem Brechungsindex $n(\vec{r})$:

$$\phi(\vec{r},t) \stackrel{?}{=} \phi_0(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c} n(\vec{r})\, \vec{e}_K \vec{r} - \omega t\right)} \tag{2}$$

Wellengleichung oder Eikonal?

Ansatz: Welle bei ortsabhängigem Brechungsindex $n(\vec{r})$:

$$\phi(\vec{r},t) \stackrel{?}{=} \phi_0(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c} \overbrace{n(\vec{r})\, \vec{e}_k \vec{r}}^{L(\vec{r})} - \omega t\right)} \tag{2}$$

Wellengleichung oder Eikonal?

Ansatz: Welle bei ortsabhängigem Brechungsindex $n(\vec{r})$:

$$\phi(\vec{r},t) \stackrel{?}{=} \phi_0(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c} \overbrace{n(\vec{r})\,\vec{e}_k \vec{r}}^{L(\vec{r})} - \omega t\right)} = \phi_0(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c} L(\vec{r}) - \omega t\right)} \qquad (2)$$

Wellengleichung oder Eikonal?

Leibniz Universität Hannover

Ansatz: Welle bei ortsabhängigem Brechungsindex $n(\vec{r})$:

$L(\vec{r})$

$$\phi(\vec{r},t) \overset{?}{=} \phi_0(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c} n(\vec{r})\, \vec{e}_k \vec{r} - \omega t\right)} = \phi_0(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c} L(\vec{r}) - \omega t\right)} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ (2) erfüllt Wellengleichung (1) **nur** für $\lambda \to 0$ (bzw. $\omega \to \infty$)!

Wellengleichung oder Eikonal?

Ansatz: Welle bei ortsabhängigem Brechungsindex $n(\vec{r})$:

$$\phi(\vec{r},t) \stackrel{?}{=} \phi_0(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c}\overbrace{n(\vec{r})\,\vec{e}_k\vec{r}}^{L(\vec{r})}-\omega t\right)} = \phi_0(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c}L(\vec{r})-\omega t\right)} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ (2) erfüllt Wellengleichung (1) **nur** für $\lambda \to 0$ (bzw. $\omega \to \infty$)!
Dann durch Einsetzen von (2) in (1) $\Rightarrow$ *Eikonalgleichung*

$$\boxed{\left(\vec{\nabla} L\right)^2 = n^2}$$

Wellengleichung oder Eikonal?

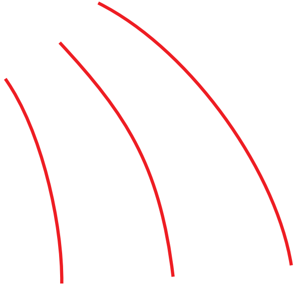
Leibniz Universität Hannover

Ansatz: Welle bei ortsabhängigem Brechungsindex $n(\vec{r})$:

$$\phi(\vec{r},t) \overset{?}{=} \phi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c}\overbrace{n(\vec{r})\,\vec{e}_k\vec{r}}^{L(\vec{r})}-\omega t\right)} = \phi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c}L(\vec{r})-\omega t\right)} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ (2) erfüllt Wellengleichung (1) **nur** für $\lambda \to 0$ (bzw. $\omega \to \infty$)!
Dann durch Einsetzen von (2) in (1) $\Rightarrow$ *Eikonalgleichung*

$$\boxed{\left(\vec{\nabla}L\right)^2 = n^2}$$



$L = \text{const.}$

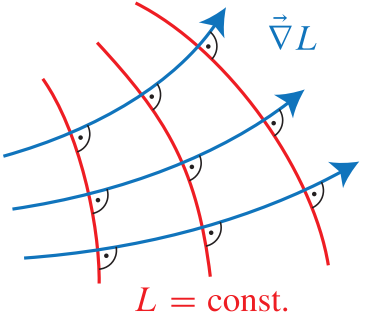
Wellengleichung oder Eikonal?

Ansatz: Welle bei ortsabhängigem Brechungsindex $n(\vec{r})$:

$$\phi(\vec{r},t) \stackrel{?}{=} \phi_0(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c} \overbrace{n(\vec{r})\,\vec{e}_k\vec{r}}^{L(\vec{r})} - \omega t\right)} = \phi_0(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c} L(\vec{r}) - \omega t\right)} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ (2) erfüllt Wellengleichung (1) **nur** für $\lambda \to 0$ (bzw. $\omega \to \infty$)!
Dann durch Einsetzen von (2) in (1) $\Rightarrow$ *Eikonalgleichung*

$$\boxed{\left(\vec{\nabla} L\right)^2 = n^2}$$



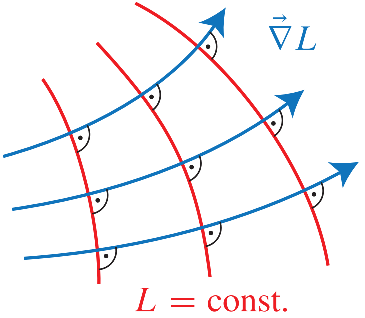
Wellengleichung oder Eikonal?

Ansatz: Welle bei ortsabhängigem Brechungsindex $n(\vec{r})$:

$$\phi(\vec{r},t) \overset{?}{=} \phi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c}\overbrace{n(\vec{r})\,\vec{e}_k\vec{r}}^{L(\vec{r})}-\omega t\right)} = \phi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\underbrace{\left(\frac{\omega}{c}L(\vec{r})-\omega t\right)}_{P(\vec{r},t)}} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ (2) erfüllt Wellengleichung (1) **nur** für $\lambda \to 0$ (bzw. $\omega \to \infty$)!
Dann durch Einsetzen von (2) in (1) $\Rightarrow$ *Eikonalgleichung*

$$\boxed{\left(\vec{\nabla}L\right)^2 = n^2}$$



Wellengleichung oder Eikonal?

Ansatz: Welle bei ortsabhängigem Brechungsindex $n(\vec{r})$:

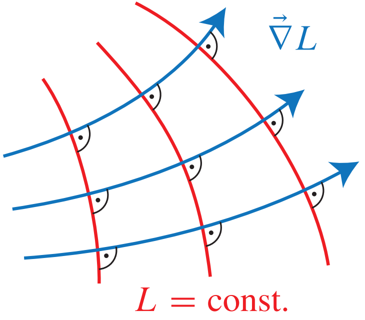
$$\phi(\vec{r},t) \stackrel{?}{=} \phi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{c}\overbrace{n(\vec{r})\,\vec{e}_k\vec{r}}^{L(\vec{r})}-\omega t\right)} = \phi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\underbrace{\left(\frac{\omega}{c}L(\vec{r})-\omega t\right)}_{P(\vec{r},t)}} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ (2) erfüllt Wellengleichung (1) **nur** für $\lambda \rightarrow 0$ (bzw. $\omega \rightarrow \infty$)!
Dann durch Einsetzen von (2) in (1) $\Rightarrow$ *Eikonalgleichung*
(auch in zeitabhängiger Form)

$$\boxed{\left(\vec{\nabla} L\right)^2 = n^2}$$

$$\boxed{\left(\vec{\nabla} P\right)^2 = \frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2}$$

mit $\quad P(\vec{r},t) = \dfrac{\omega}{c}L(\vec{r}) - \omega t$



Übersicht

1. Warum Quantenmechanik? – Historie
2. „Licht und Lichtstrahlen“ oder „Was ist ein Eikonal?“
3. Die Schwierigkeit mit Newtons Mechanik
4. Deshalb: Lagrange-Mechanik
5. Hamilton-Mechanik und das Hamilton-Jacobi-Verfahren: Besser als Lagrange?
6. Von Hamilton zu Schrödinger
7. Resultate und Zusammenfassung

Newtonsche Mechanik

Newtons **»Lex Secunda«**

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Newtonsche Mechanik

Newtons **»Lex Secunda«**

$$m \, \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

mit m = Punktmasse

Newtonsche Mechanik

Newtons **»Lex Secunda«**

$$m \, \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

mit m = Punktmasse
$\vec{r}$ = Ortsvektor

Newtonsche Mechanik

Newtons **»Lex Secunda«**

$$m\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

mit m = Punktmasse
$\vec{r}$ = Ortsvektor
$\vec{F}$ = externe Kraft

Newtonsche Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Newtons **»Lex Secunda«**
für Teilchensysteme

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$$

mit m_i = Punktmasse
$\vec{r}_i$ = Ortsvektor
$\vec{F}_i$ = externe Kraft

Newtonsche Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Newtons **»Lex Secunda«**
für Teilchensysteme

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}$$

mit	m_i	=	Punktmasse
	$\vec{r}_i$	=	Ortsvektor
	$\vec{F}_i$	=	externe Kraft
	$\vec{F}_{ij}$	=	innere Kräfte

Newtonsche Mechanik

Newtons **»Lex Secunda«** für Teilchensysteme

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}$$

mit

mit	m_i	=	Punktmasse
	$\vec{r}_i$	=	Ortsvektor
	$\vec{F}_i$	=	externe Kraft
	$\vec{F}_{ij}$	=	innere Kräfte

Beispiel $n = 2$: ebenes Gleitpendel

Newtonsche Mechanik

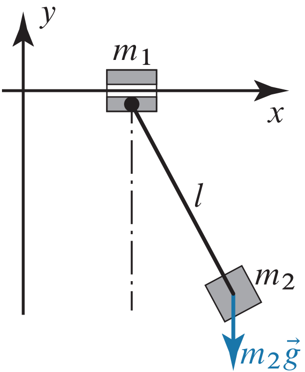
Leibniz Universität Hannover

Newtons **»Lex Secunda«** für Teilchensysteme

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}$$

mit
m_i = Punktmasse
$\vec{r}_i$ = Ortsvektor
$\vec{F}_i$ = externe Kraft
$\vec{F}_{ij}$ = innere Kräfte

Beispiel $n = 2$: ebenes Gleitpendel



Newtonsche Mechanik

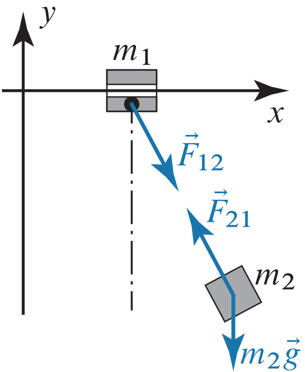
Leibniz Universität Hannover

Newtons **»Lex Secunda«** für Teilchensysteme

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}$$

mit
m_i = Punktmasse
$\vec{r}_i$ = Ortsvektor
$\vec{F}_i$ = externe Kraft
$\vec{F}_{ij}$ = innere Kräfte

Beispiel $n = 2$: ebenes Gleitpendel



Newtonsche Mechanik

Leibniz Universität Hannover

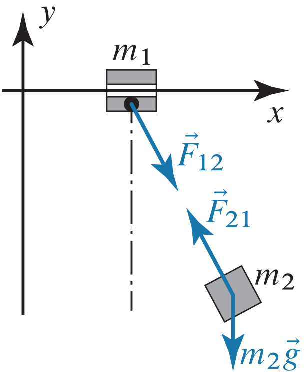
Newtons **»Lex Secunda«** für Teilchensysteme

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}$$

mit

m_i	=	Punktmasse
$\vec{r}_i$	=	Ortsvektor
$\vec{F}_i$	=	externe Kraft
$\vec{F}_{ij}$	=	innere Kräfte

Beispiel $n = 2$: ebenes Gleitpendel



Problem: Innere Kräfte bzw. Zwangskräfte sind i. Allg. unbekannt!

Newtonsche Mechanik

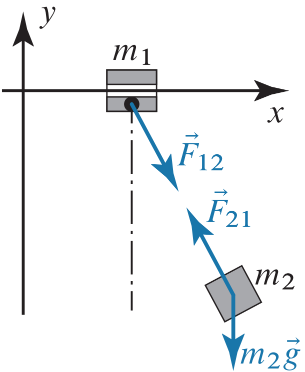
Leibniz Universität Hannover

Newtons **»Lex Secunda«** für Teilchensysteme

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}$$

mit
m_i = Punktmasse
$\vec{r}_i$ = Ortsvektor
$\vec{F}_i$ = externe Kraft
$\vec{F}_{ij}$ = innere Kräfte

Beispiel $n = 2$: ebenes Gleitpendel



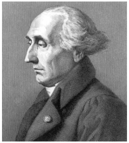
Problem: Innere Kräfte bzw. Zwangskräfte sind i. Allg. unbekannt!

Lösung: Umformulierung derart, dass Zwangskräfte entfallen
$\Rightarrow$ Lagrange-Mechanik

Übersicht

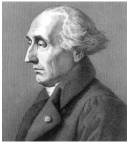
1. Warum Quantenmechanik? – Historie
2. „Licht und Lichtstrahlen“ oder „Was ist ein Eikonal?“
3. Die Schwierigkeit mit Newtons Mechanik
4. Deshalb: Lagrange-Mechanik
5. Hamilton-Mechanik und das Hamilton-Jacobi-Verfahren: Besser als Lagrange?
6. Von Hamilton zu Schrödinger
7. Resultate und Zusammenfassung

Lagrange-Mechanik



1788 Joseph-Louis Lagrange

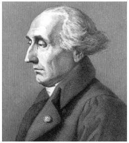
Lagrange-Mechanik



1788 Joseph-Louis Lagrange

- begründet die Analytische Mechanik

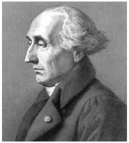
Lagrange-Mechanik



1788 Joseph-Louis Lagrange

- begründet die Analytische Mechanik
- entwickelt den nach ihm benannten Lagrange-Formalismus

Lagrange-Mechanik



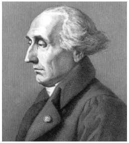
1788 Joseph-Louis Lagrange

- begründet die Analytische Mechanik
- entwickelt den nach ihm benannten Lagrange-Formalismus

Lagrange-Funktion

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right)$$

Lagrange-Mechanik



1788 Joseph-Louis Lagrange

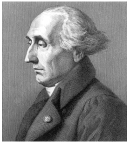
- begründet die Analytische Mechanik
- entwickelt den nach ihm benannten Lagrange-Formalismus

Lagrange-Funktion

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right)$$

= Funktion aller **unabhängigen**, verallgemeinerten Koordinaten $q_k(t)$ und Geschwindigkeiten $\dot{q}_k(t)$ (und ggf. noch explizit der Zeit t), welche ein mechanisches System **vollständig** beschreibt.

Lagrange-Mechanik



1788 Joseph-Louis Lagrange

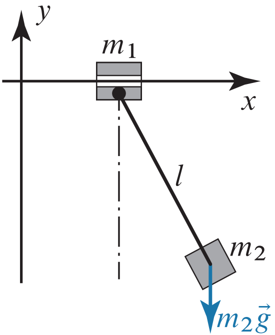
- begründet die Analytische Mechanik
- entwickelt den nach ihm benannten Lagrange-Formalismus

Lagrange-Funktion

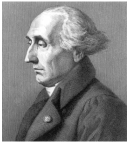
$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right)$$

= Funktion aller **unabhängigen**, verallgemeinerten Koordinaten $q_k(t)$ und Geschwindigkeiten $\dot{q}_k(t)$ (und ggf. noch explizit der Zeit t), welche ein mechanisches System **vollständig** beschreibt.

Beispiel: wieder Gleitpendel



Lagrange-Mechanik



1788 Joseph-Louis Lagrange

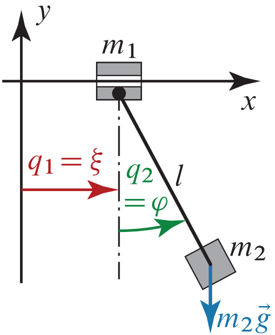
- begründet die Analytische Mechanik
- entwickelt den nach ihm benannten Lagrange-Formalismus

Lagrange-Funktion

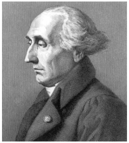
$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right)$$

= Funktion aller **unabhängigen**, verallgemeinerten Koordinaten $q_k(t)$ und Geschwindigkeiten $\dot{q}_k(t)$ (und ggf. noch explizit der Zeit t), welche ein mechanisches System **vollständig** beschreibt.

Beispiel: wieder Gleitpendel



Lagrange-Mechanik



1788 Joseph-Louis Lagrange

- begründet die Analytische Mechanik
- entwickelt den nach ihm benannten Lagrange-Formalismus

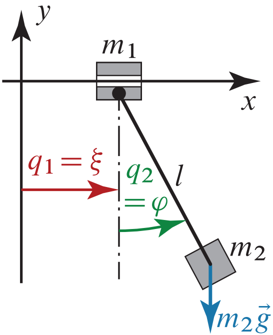
Lagrange-Funktion

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right)$$

= Funktion aller **unabhängigen**, verallgemeinerten Koordinaten $q_k(t)$ und Geschwindigkeiten $\dot{q}_k(t)$ (und ggf. noch explizit der Zeit t), welche ein mechanisches System **vollständig** beschreibt.

hier also: $L(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2) = L(\xi,\varphi,\dot{\xi},\dot{\varphi})$

Beispiel: wieder Gleitpendel



Lagrange-Funktion und Wirkung

Leibniz Universität Hannover

Eigenschaften von L:

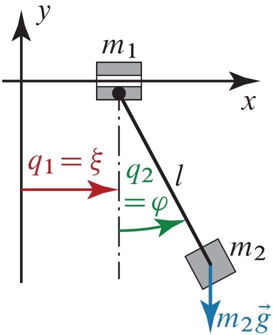
1. $$\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$$

Lagrange-Funktion und Wirkung

Eigenschaften von L:

1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

Beispiel (Forts.):



Lagrange-Funktion und Wirkung

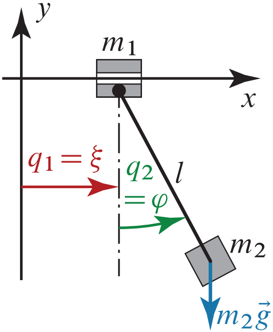
Eigenschaften von L:

1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

hier:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}^2$$

Beispiel (Forts.):



Lagrange-Funktion und Wirkung

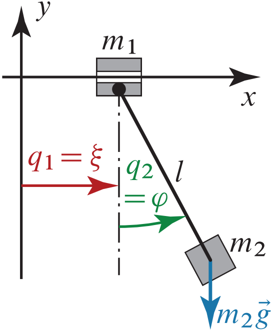
Eigenschaften von L:

1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

hier:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right)$$

Beispiel (Forts.):



Lagrange-Funktion und Wirkung

Eigenschaften von L:

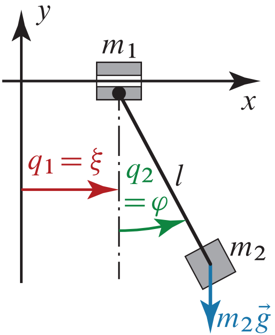
1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

hier:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$$

(mit $x_2 = \xi + l\sin\varphi,\ y_2 = -l\cos\varphi$)

Beispiel (Forts.):



Lagrange-Funktion und Wirkung

Leibniz Universität Hannover

Eigenschaften von L:

1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

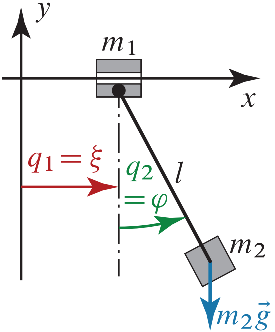
hier:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right)$$

(mit $x_2 = \xi + l \sin\varphi,\ y_2 = -l \cos\varphi$)

$$V = -m_2\, g\, l \cos\varphi$$

Beispiel (Forts.):



Lagrange-Funktion und Wirkung

Eigenschaften von L:

1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

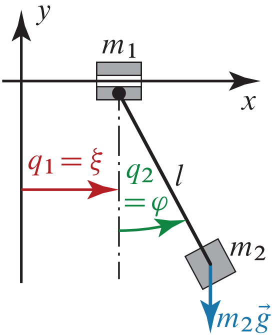
hier:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$$

(mit $x_2 = \xi + l \sin\varphi,\ y_2 = -l\cos\varphi$)

$$V = -m_2\, g\, l \cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad L$$

Beispiel (Forts.):



Lagrange-Funktion und Wirkung

Leibniz Universität Hannover

Eigenschaften von L:

1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

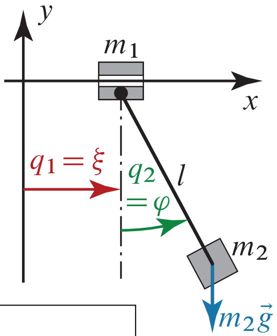
hier:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$$

(mit $x_2 = \xi + l \sin\varphi,\ y_2 = -l\cos\varphi$)

$$V = -m_2\, g\, l \cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad L$$

Beispiel (Forts.):



2. $\boxed{S[\{q_k\}] := \int_{t_1}^{t_2} L\left(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t\right) \mathrm{d}t}$

Lagrange-Funktion und Wirkung

Leibniz Universität Hannover

Eigenschaften von L:

1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

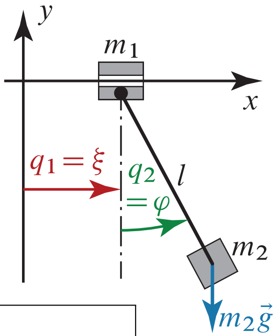
hier:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$$

(mit $x_2 = \xi + l \sin\varphi,\ y_2 = -l \cos\varphi$)

$$V = -m_2\, g\, l \cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad L$$

Beispiel (Forts.):



2. $\boxed{S[\{q_k\}] := \int_{t_1}^{t_2} L\left(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t\right) \mathrm{d}t}$

S = »**Wirkung**«

Lagrange-Funktion und Wirkung

Leibniz Universität Hannover

Eigenschaften von L:

1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

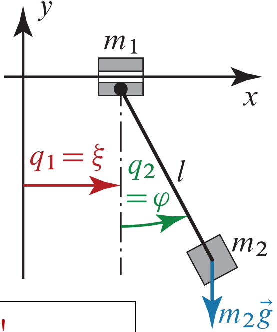
hier:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right)$$

(mit $x_2 = \xi + l \sin\varphi, \ y_2 = -l \cos\varphi$)

$$V = -m_2 \, g \, l \cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad L$$

Beispiel (Forts.):



2. $\boxed{S[\{q_k\}] := \int_{t_1}^{t_2} L\left(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t\right) \mathrm{d}t \overset{!}{\rightarrow} \text{stationär}}$

S = **»Wirkung«**

Lagrange-Funktion und Wirkung

Leibniz Universität Hannover

Eigenschaften von L:

1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

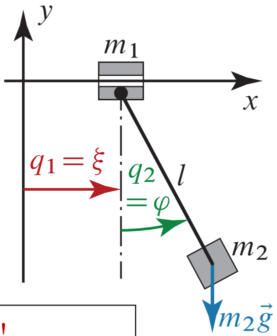
hier:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right)$$

(mit $x_2 = \xi + l \sin\varphi,\ y_2 = -l \cos\varphi$)

$$V = -m_2\, g\, l \cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad L$$

Beispiel (Forts.):



2. $\boxed{S[\{q_k\}] := \int_{t_1}^{t_2} L\left(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t\right) \mathrm{d}t \overset{!}{\rightarrow} \text{stationär}}$ (z.B. **minimal**)

S = **»Wirkung«**

Lagrange-Funktion und Wirkung

Eigenschaften von L:

1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

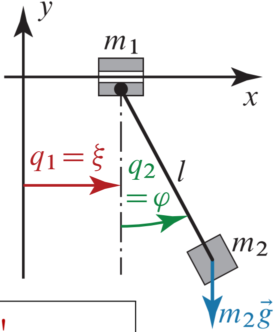
hier:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right)$$

(mit $x_2 = \xi + l \sin\varphi, \; y_2 = -l \cos\varphi$)

$$V = -m_2\, g\, l \cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad L$$

Beispiel (Forts.):



2. $\boxed{S[\{q_k\}] := \int_{t_1}^{t_2} L\left(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t\right) \mathrm{d}t \overset{!}{\rightarrow} \text{stationär}}$ (z.B. **minimal**)

= **»Hamiltonsches Prinzip«** (Hamilton 1834), S = **»Wirkung«**

Lagrange-Funktion und Wirkung

Leibniz Universität Hannover

Eigenschaften von L:

1. $\boxed{L := E_{kin} - E_{pot} =: T - V}$

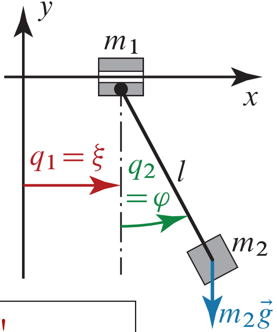
hier:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$$

(mit $x_2 = \xi + l \sin\varphi,\ y_2 = -l \cos\varphi$)

$$V = -m_2\, g\, l \cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad L$$

Beispiel (Forts.):



2. $\boxed{S[\{q_k\}] := \int_{t_1}^{t_2} L\left(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t\right) \mathrm{d}t \overset{!}{\to} \text{stationär}}$ (z.B. **minimal**)

= **»Hamiltonsches Prinzip«** (Hamilton 1834), S = **»Wirkung«**

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \quad \forall\, k$$

(»Eulersche Differentialgleichungen«)

Lagrange-Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Vorteile der Lagrange-Mechanik:

Lagrange-Mechanik

Vorteile der Lagrange-Mechanik:

1. **Keine Kräftebilanz** nötig, keine Zwangskräfte

Lagrange-Mechanik

Vorteile der Lagrange-Mechanik:

1. **Keine Kräftebilanz** nötig, keine Zwangskräfte

   $\Rightarrow$ systematischere Vorgehensweise!

Lagrange-Mechanik

Vorteile der Lagrange-Mechanik:

1. **Keine Kräftebilanz** nötig, keine Zwangskräfte
   $\Rightarrow$ systematischere Vorgehensweise!

2. Euler-Dgln. **forminvariant** bei Punkttransformationen
   $q_k \to Q_k(\{q_j\}, t)$

Lagrange-Mechanik

Vorteile der Lagrange-Mechanik:

1. **Keine Kräftebilanz** nötig, keine Zwangskräfte
   $\Rightarrow$ systematischere Vorgehensweise!

2. Euler-Dgln. **forminvariant** bei Punkttransformationen
   $q_k \to Q_k(\{q_j\}, t)$
   $\Rightarrow$ Problem lässt sich ggf. wesentlich vereinfachen!

Lagrange-Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Vorteile der Lagrange-Mechanik:

1. **Keine Kräftebilanz** nötig, keine Zwangskräfte
   $\Rightarrow$ systematischere Vorgehensweise!

2. Euler-Dgln. **forminvariant** bei Punkttransformationen
   $q_k \to Q_k(\{q_j\}, t)$
   $\Rightarrow$ Problem lässt sich ggf. wesentlich vereinfachen!

3. Verallgemeinerung auf **beliebige** »Koordinaten« möglich – z.B. auch auf elektrische Potentiale als »Koordinaten«

Lagrange-Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Vorteile der Lagrange-Mechanik:

1. **Keine Kräftebilanz** nötig, keine Zwangskräfte
   $\Rightarrow$ systematischere Vorgehensweise!

2. Euler-Dgln. **forminvariant** bei Punkttransformationen
   $q_k \to Q_k(\{q_j\}, t)$
   $\Rightarrow$ Problem lässt sich ggf. wesentlich vereinfachen!

3. Verallgemeinerung auf **beliebige** »Koordinaten« möglich – z. B. auch auf elektrische Potentiale als »Koordinaten«
   $\Rightarrow$ Lagrange-Formalismus erweist sich als universell für die gesamte Physik (= »first principle«)!

Lagrange-Mechanik

Vorteile der Lagrange-Mechanik:

1. **Keine Kräftebilanz** nötig, keine Zwangskräfte
   $\Rightarrow$ systematischere Vorgehensweise!

2. Euler-Dgln. **forminvariant** bei Punkttransformationen
   $q_k \to Q_k(\{q_j\}, t)$
   $\Rightarrow$ Problem lässt sich ggf. wesentlich vereinfachen!

3. Verallgemeinerung auf **beliebige** »Koordinaten« möglich – z. B. auch auf elektrische Potentiale als »Koordinaten«
   $\Rightarrow$ Lagrange-Formalismus erweist sich als universell für die gesamte Physik (= »first principle«)!

Übersicht

1. Warum Quantenmechanik? – Historie
2. „Licht und Lichtstrahlen“ oder „Was ist ein Eikonal?“
3. Die Schwierigkeit mit Newtons Mechanik
4. Deshalb: Lagrange-Mechanik
5. Hamilton-Mechanik und das Hamilton-Jacobi-Verfahren: Besser als Lagrange?
6. Von Hamilton zu Schrödinger
7. Resultate und Zusammenfassung

Hamilton-Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Lagrange-Funktion

Hamilton-Mechanik

Lagrange-Funktion

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right)$$

Hamilton-Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Lagrange-Funktion

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right) = T - V$$

Hamilton-Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Lagrange-Funktion $\longrightarrow$ **Hamilton-Funktion**

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right) =: \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i - H\left(\{q_k\},\{p_k\},t\right) = T - V$$

Hamilton-Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Lagrange-Funktion $\longrightarrow$ **Hamilton-Funktion**

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right) =: \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i - H\left(\{q_k\},\{p_k\},t\right) = T - V$$

Hamilton-Mechanik

Lagrange-Funktion $\longrightarrow$ **Hamilton-Funktion**

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right) =: \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i - \underbrace{H\left(\{q_k\},\{p_k\},t\right)}_{T+V} = T - V$$

Hamilton-Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Lagrange-Funktion ⟶ **Hamilton-Funktion**

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right) =: \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i - \underbrace{H\left(\{q_k\},\{p_k\},\cancel{t}\right)}_{T+V\ \text{(falls } \frac{\partial H}{\partial t}=0\text{)}} = T - V$$

Hamilton-Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Lagrange-Funktion $\longrightarrow$ Hamilton-Funktion

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right) =: \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i - \underbrace{H\left(\{q_k\},\{p_k\},\cancel{t}\right)}_{E\,=\,T+V \text{ (falls } \frac{\partial H}{\partial t}=0\text{)}} = T - V$$

Hamilton-Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Lagrange-Funktion $\longrightarrow$ **Hamilton-Funktion**

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right) =: \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i - \underbrace{H\left(\{q_k\},\{p_k\},\cancel{t}\right)}_{E\,=\,T+V\ \text{(falls } \frac{\partial H}{\partial t}=0\text{)}} = T - V$$

Anwendung des Hamiltonschen Prinzips ergibt für H die **kanonischen Gleichungen**

Hamilton-Mechanik

Lagrange-Funktion $\longrightarrow$ **Hamilton-Funktion**

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right) =: \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i - \underbrace{H\left(\{q_k\},\{p_k\},\cancel{t}\right)}_{E\,=\,T+V \text{ (falls } \frac{\partial H}{\partial t}=0)} = T - V$$

Anwendung des Hamiltonschen Prinzips ergibt für H die **kanonischen Gleichungen**

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial p_i}} \quad \text{und} \quad \boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial q_i}} \qquad (3)$$

Hamilton-Mechanik

Lagrange-Funktion $\longrightarrow$ **Hamilton-Funktion**

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right) =: \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i - \underbrace{H\left(\{q_k\},\{p_k\},\cancel{t}\right)}_{E\,=\,T+V \text{ (falls } \frac{\partial H}{\partial t}=0)} = T - V$$

Anwendung des Hamiltonschen Prinzips ergibt für H die **kanonischen Gleichungen** (mit den Abkürzungen $\boldsymbol{q} \equiv \{q_k\}$ und $\boldsymbol{p} \equiv \{p_k\}$)

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial p_i}} \quad \text{und} \quad \boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial q_i}} \qquad (3)$$

Hamilton-Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Lagrange-Funktion $\longrightarrow$ **Hamilton-Funktion**

$$L\left(\{q_k\},\{\dot{q}_k\},t\right) =: \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i - \underbrace{H\left(\{q_k\},\{p_k\},\cancel{t}\right)}_{E\,=\,T+V\ \text{(falls }\frac{\partial H}{\partial t}=0\text{)}} = T - V$$

Anwendung des Hamiltonschen Prinzips ergibt für H die **kanonischen Gleichungen** (mit den Abkürzungen $\boldsymbol{q} \equiv \{q_k\}$ und $\boldsymbol{p} \equiv \{p_k\}$)

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial p_i}} \quad \text{und} \quad \boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial q_i}} \tag{3}$$

(3) ersetzen jetzt die für L geltenden **Euler-Dgln.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

Hamilton-Jacobi-Verfahren

Leibniz Universität Hannover

Kanonische Gleichungen und ein geniales Lösungsverfahren

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial q_i}$$

Hamilton-Jacobi-Verfahren

Leibniz Universität Hannover

Kanonische Gleichungen und ein geniales Lösungsverfahren

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial q_i}$$

... sind **sofort** lösbar, falls $\boldsymbol{H \equiv 0}$

Hamilton-Jacobi-Verfahren

Kanonische Gleichungen und ein geniales Lösungsverfahren

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial q_i}$$

… sind **sofort** lösbar, falls $\boldsymbol{H \equiv 0}$ ($\Rightarrow$ $q_i = \text{const.}$ und $p_i = \text{const.}$ $\forall\ i$)

Hamilton-Jacobi-Verfahren

Leibniz Universität Hannover

Kanonische Gleichungen und ein geniales Lösungsverfahren

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial q_i}$$

... sind **sofort** lösbar, falls $\boldsymbol{H \equiv 0}$ ($\Rightarrow q_i = \text{const.}$ und $p_i = \text{const.}\ \forall\ i$)

... ist **erreichbar** durch **kanonische** Transformation

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \longrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) \Rightarrow H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \longrightarrow \tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$$

Hamilton-Jacobi-Verfahren

Leibniz Universität Hannover

Kanonische Gleichungen und ein geniales Lösungsverfahren

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial q_i}$$

… sind **sofort** lösbar, falls $\boldsymbol{H \equiv 0}$ ($\Rightarrow q_i = \text{const.}$ und $p_i = \text{const.}\ \forall\ i$)

… ist **erreichbar** durch **kanonische** Transformation

$$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \longrightarrow (\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}) \Rightarrow H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \longrightarrow \tilde{H}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t)$$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \stackrel{!}{=} \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t) \tag{4}$$

Hamilton-Jacobi-Verfahren

Kanonische Gleichungen und ein geniales Lösungsverfahren

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial q_i}$$

... sind **sofort** lösbar, falls $\boldsymbol{H \equiv 0}$ ($\Rightarrow q_i = \text{const.}$ und $p_i = \text{const.}$ $\forall\ i$)

... ist **erreichbar** durch **allgemeine kanonische** Transformation

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \longrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) \Rightarrow H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \longrightarrow \tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \stackrel{!}{=} \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t) + \frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)}{\mathrm{d}t} \qquad (4)$$

Hamilton-Jacobi-Verfahren

Leibniz Universität Hannover

Kanonische Gleichungen und ein geniales Lösungsverfahren

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial q_i}$$

... sind **sofort** lösbar, falls $\boldsymbol{H \equiv 0}$ ($\Rightarrow q_i =$ const. und $p_i =$ const. $\forall\ i$)

... ist **erreichbar** durch **allgemeine kanonische** Transformation

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \longrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) \Rightarrow H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \longrightarrow \tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$$

»Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \overset{!}{=} \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t) + \frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)}{\mathrm{d}t} \qquad (4)$$

Hamilton-Jacobi-Verfahren

Kanonische Gleichungen und ein geniales Lösungsverfahren

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial q_i}$$

…sind **sofort** lösbar, falls $\boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{0}$ ($\Rightarrow q_i = \text{const.}$ und $p_i = \text{const.}\ \forall\ i$)

…ist **erreichbar** durch **allgemeine kanonische** Transformation

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \longrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) \Rightarrow H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \longrightarrow \tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$$

»Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \stackrel{!}{=} \sum_i P_i \dot{Q}_i - \underbrace{\tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)}_{\text{soll gleich } \textbf{Null} \text{ sein!}} + \frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

Hamilton-Jacobi-Verfahren

Kanonische Gleichungen und ein geniales Lösungsverfahren

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial q_i}$$

… sind **sofort** lösbar, falls $\boldsymbol{H \equiv 0}$ ($\Rightarrow q_i = \text{const.}$ und $p_i = \text{const.}\ \forall\ i$)

… ist **erreichbar** durch **allgemeine kanonische** Transformation

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \longrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) \Rightarrow H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \longrightarrow \tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$$

»Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, \bcancel{\boldsymbol{P}}, t)$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \stackrel{!}{=} \sum_i P_i \dot{Q}_i - \underbrace{\tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)}_{\text{soll gleich \textbf{Null} sein!}} + \frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)}{\mathrm{d}t} \qquad (4)$$

Hamilton-Jacobi-Verfahren

Leibniz Universität Hannover

Kanonische Gleichungen und ein geniales Lösungsverfahren

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial q_i}$$

... sind **sofort** lösbar, falls $\boldsymbol{H \equiv 0}$ ($\Rightarrow q_i = \text{const.}$ und $p_i = \text{const.}\ \forall\ i$)

... ist **erreichbar** durch **allgemeine kanonische** Transformation
$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \longrightarrow (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) \Rightarrow H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \longrightarrow \tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$

»Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \stackrel{!}{=} \sum_i P_i \dot{Q}_i - \underbrace{\tilde{H}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)}_{\text{soll gleich } \textbf{Null} \text{ sein!}} + \frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)}{\mathrm{d}t} \qquad (4)$$

Im **Gegensatz zu Lagrange**: Durch $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}, t)$ **allgemeinere** Transformationen möglich!

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, t)$?

Leibniz Universität Hannover

bisher: Wirkung

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\right) \mathrm{d}t$$

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, t)$?

bisher: Wirkung und Hamiltonsches Prinzip (HP)

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\right) \mathrm{d}t \stackrel{!}{\rightarrow} \text{stationär}$$

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, t)$?

bisher: Wirkung und Hamiltonsches Prinzip (HP)

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L\,(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,\mathrm{d}t \overset{!}{\rightarrow} \text{stationär}$$

jetzt: für $F(\boldsymbol{q}, t)$ folgt nach »kurzer« 😉 Rechnung (HP bezgl. (4))

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q},t)$?

bisher: Wirkung und Hamiltonsches Prinzip (HP)

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,\mathrm{d}t \overset{!}{\to} \text{stationär}$$

jetzt: für $F(\boldsymbol{q},t)$ folgt nach »kurzer« 😉 Rechnung (HP bezgl. (4))

1.

$$F(\boldsymbol{q},t) = \int L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,\mathrm{d}t + \text{const.}$$

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, t)$?

bisher: Wirkung und Hamiltonsches Prinzip (HP)

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,\mathrm{d}t \overset{!}{\to} \text{stationär}$$

jetzt: für $F(\boldsymbol{q}, t)$ folgt nach »kurzer« 😉 Rechnung (HP bezgl. (4))

1.

$$F(\boldsymbol{q}, t) = \int L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,\mathrm{d}t + \text{const.}$$

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, t)$?

bisher: Wirkung und Hamiltonsches Prinzip (HP)

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, \mathrm{d}t \overset{!}{\to} \text{stationär}$$

jetzt: für $F(\boldsymbol{q}, t)$ folgt nach »kurzer« 😉 Rechnung (HP bezgl. (4))

1. die Hamiltonsche Wirkungsfunktion

$$F(\boldsymbol{q}, t) = \int L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, \mathrm{d}t + \text{const.} =: S(\boldsymbol{q}, t)$$

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, t)$?

Leibniz Universität Hannover

bisher: Wirkung und Hamiltonsches Prinzip (HP)

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,\mathrm{d}t \overset{!}{\rightarrow} \text{stationär}$$

jetzt: für $F(\boldsymbol{q}, t)$ folgt nach »kurzer« 😉 Rechnung (HP bezgl. (4))

1. die Hamiltonsche Wirkungsfunktion

$$F(\boldsymbol{q}, t) = \int L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,\mathrm{d}t + \text{const.} =: S(\boldsymbol{q}, t)$$

2. der Impuls $\boldsymbol{p} = \dfrac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial \boldsymbol{q}} = \nabla S$

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, t)$?

bisher: Wirkung und Hamiltonsches Prinzip (HP)

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,\mathrm{d}t \stackrel{!}{\rightarrow} \text{stationär}$$

jetzt: für $F(\boldsymbol{q}, t)$ folgt nach »kurzer« 😉 Rechnung (HP bezgl. (4))

1. die Hamiltonsche Wirkungsfunktion

$$F(\boldsymbol{q}, t) = \int L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,\mathrm{d}t + \text{const.} =: S(\boldsymbol{q}, t)$$

2. der Impuls $\boldsymbol{p} = \dfrac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial \boldsymbol{q}} = \nabla S$

3.

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} = -H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$$

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q}, t)$?

Leibniz Universität Hannover

bisher: Wirkung und Hamiltonsches Prinzip (HP)

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L\,(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,\mathrm{d}t \overset{!}{\rightarrow} \text{stationär}$$

jetzt: für $F(\boldsymbol{q}, t)$ folgt nach »kurzer« 😉 Rechnung (HP bezgl. (4))

1. die Hamiltonsche Wirkungsfunktion

$$F(\boldsymbol{q}, t) = \int L\,(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,\mathrm{d}t + \text{const.} =: S(\boldsymbol{q}, t)$$

2. der Impuls $\boldsymbol{p} = \dfrac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial \boldsymbol{q}} = \nabla S$

3.

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} = -H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$$

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q},t)$?

bisher: Wirkung und Hamiltonsches Prinzip (HP)

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,\mathrm{d}t \overset{!}{\rightarrow} \text{stationär}$$

jetzt: für $F(\boldsymbol{q},t)$ folgt nach »kurzer« 😉 Rechnung (HP bezgl. (4))

1. die Hamiltonsche Wirkungsfunktion

$$F(\boldsymbol{q},t) = \int L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,\mathrm{d}t + \text{const.} =: S(\boldsymbol{q},t)$$

2. der Impuls $\boldsymbol{p} = \dfrac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial \boldsymbol{q}} = \nabla S$

3.

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial t} = -H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{H(\boldsymbol{q},\nabla S,t) + \frac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial t} = 0}$$

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q},t)$?

bisher: Wirkung und Hamiltonsches Prinzip (HP)

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,\mathrm{d}t \overset{!}{\rightarrow} \text{stationär}$$

jetzt: für $F(\boldsymbol{q},t)$ folgt nach »kurzer« 😉 Rechnung (HP bezgl. (4))

1. die Hamiltonsche Wirkungsfunktion

$$F(\boldsymbol{q},t) = \int L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,\mathrm{d}t + \text{const.} =: S(\boldsymbol{q},t)$$

2. der Impuls $\boldsymbol{p} = \dfrac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial \boldsymbol{q}} = \nabla S$

3. die Hamilton-Jacobi-Dgl. (**HJD**)

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial t} = -H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{H(\boldsymbol{q},\nabla S,t) + \frac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial t} = 0}$$

Was ist die »Erzeugende« $F(\boldsymbol{q},t)$?

Leibniz Universität Hannover

bisher: Wirkung und Hamiltonsches Prinzip (HP)

$$S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L\,(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,\mathrm{d}t \overset{!}{\to} \text{stationär}$$

jetzt: für $F(\boldsymbol{q},t)$ folgt nach »kurzer« 😉 Rechnung (HP bezgl. (4))

1. die Hamiltonsche Wirkungsfunktion

$$F(\boldsymbol{q},t) = \int L\,(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,\mathrm{d}t + \text{const.} =: S(\boldsymbol{q},t)$$

2. der Impuls $\boldsymbol{p} = \dfrac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial \boldsymbol{q}} = \nabla S$

3. die Hamilton-Jacobi-Dgl. (**HJD**)

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial t} = -H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{H\,(\boldsymbol{q},\nabla S,t) + \frac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial t} = 0}$$

?

Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

Leibniz Universität Hannover

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\textbf{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t}$$

Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

Leibniz Universität Hannover

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\text{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\textbf{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

Leibniz Universität Hannover

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\textbf{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\textbf{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r}, t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

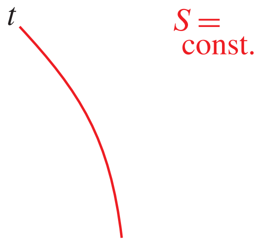
Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

Leibniz Universität Hannover

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\textbf{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\textbf{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r}, t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

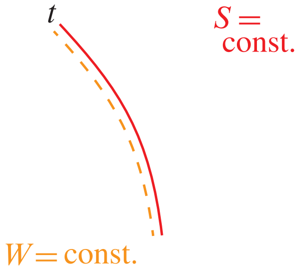


Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\text{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\text{einzelnes} \\ \text{Teilchen} \\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r}, t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

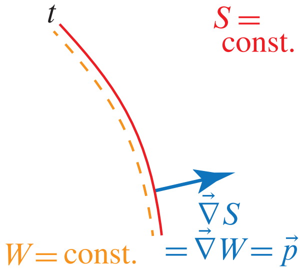


Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\text{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\textbf{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\hat{=}} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r}, t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

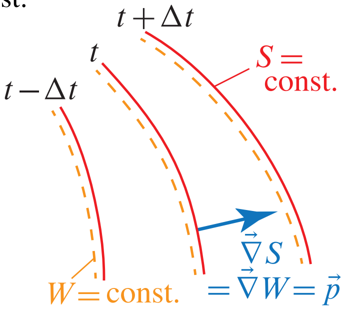


Was bedeutet $S(\boldsymbol{q},t)$ physikalisch?

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\textbf{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial t} \overset{\substack{\textbf{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r},t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

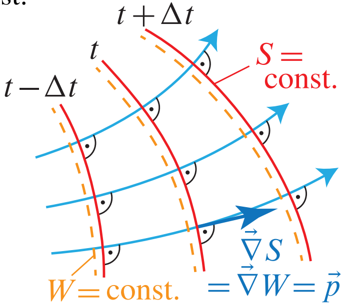


Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\text{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\textbf{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r}, t) =: -Et + W(\vec{r})}$$



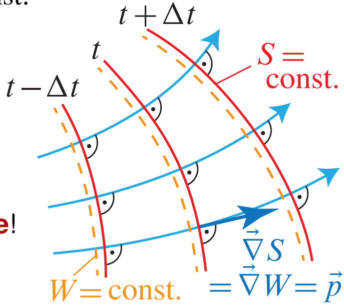
Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\textbf{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\textbf{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r}, t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

$S(\vec{r}, t)$ repräsentiert die **Phase** einer **Welle**!



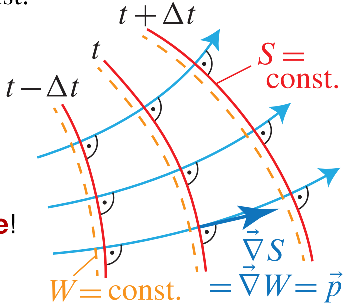
Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\text{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\text{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r}, t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

$S(\vec{r}, t)$ repräsentiert die **Phase** einer **Welle**!



Phasengeschwindigkeit $\vec{u}$:

Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

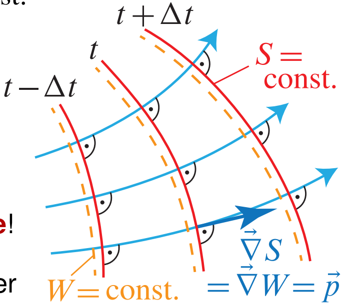
Leibniz Universität Hannover

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\text{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\text{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r}, t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

$S(\vec{r}, t)$ repräsentiert die **Phase** einer **Welle**!



Phasengeschwindigkeit $\vec{u}$: »Surfer« auf der Welle »sieht« $S = \text{const.}$ bzw. $\mathrm{d}S = 0$:

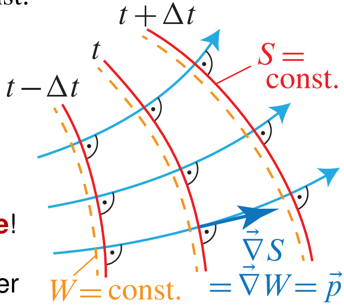
Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\textbf{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\textbf{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r}, t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

$S(\vec{r}, t)$ repräsentiert die **Phase** einer **Welle**!



Phasengeschwindigkeit $\vec{u}$: »Surfer« auf der Welle »sieht« $S = \text{const.}$ bzw. $\mathrm{d}S = 0$:

$$\mathrm{d}S = -E\mathrm{d}t + \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{\nabla} W \overset{!}{=} 0$$

Was bedeutet $S(\boldsymbol{q},t)$ physikalisch?

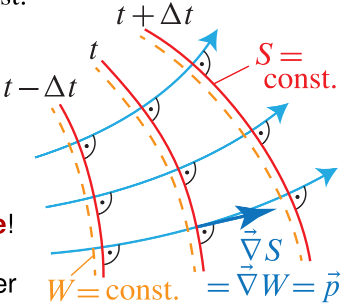
Leibniz Universität Hannover

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\text{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial t} \overset{\substack{\textbf{einzelnes}\\\text{Teilchen}\\\downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r},t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

$S(\vec{r},t)$ repräsentiert die **Phase** einer **Welle**!



Phasengeschwindigkeit $\vec{u}$: »Surfer« auf der Welle »sieht« $S = \text{const.}$ bzw. $\mathrm{d}S = 0$:

$$\mathrm{d}S = -E\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{\nabla}W \overset{!}{=} 0 \quad \overset{\vec{u} := \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}{\Rightarrow}$$

Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

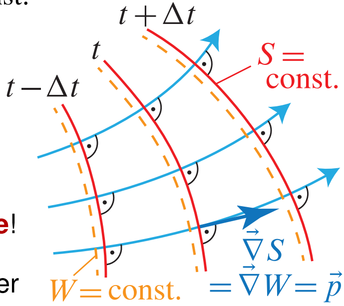
Leibniz Universität Hannover

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\text{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\text{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r}, t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

$S(\vec{r}, t)$ repräsentiert die **Phase** einer **Welle**!



Phasengeschwindigkeit $\vec{u}$: »Surfer« auf der Welle »sieht« $S = \text{const.}$ bzw. $\mathrm{d}S = 0$:

$$\mathrm{d}S = -E\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{\nabla} W \overset{!}{=} 0 \quad \overset{\vec{u} := \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}{\Rightarrow} \quad \vec{u}\,\overbrace{\vec{\nabla} W}^{\vec{p} = m\vec{v}} = E$$

Was bedeutet $S(\boldsymbol{q},t)$ physikalisch?

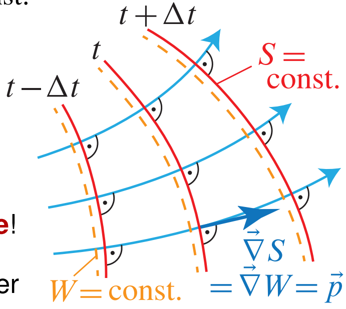
Leibniz Universität Hannover

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\text{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q},t)}{\partial t} \overset{\substack{\textbf{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\triangleq} -\frac{\partial S(\vec r,t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec r,t) =: -Et + W(\vec r)}$$

$S(\vec r,t)$ repräsentiert die **Phase** einer **Welle**!



Phasengeschwindigkeit $\vec u$: »Surfer« auf der Welle »sieht« $S = \text{const.}$ bzw. $\mathrm{d}S = 0$:

$$\mathrm{d}S = -E\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}\vec r\,\vec\nabla W \overset{!}{=} 0 \quad \overset{\vec u := \frac{\mathrm{d}\vec r}{\mathrm{d}t}}{\Rightarrow} \quad \vec u\,\overbrace{\vec\nabla W}^{\vec p = m\vec v} = E$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec u\,\vec v = \frac{E}{m}} \quad \left(\text{mit } \begin{matrix}\vec u \upuparrows \vec v \\ \text{oder} \\ \vec u \uparrow\downarrow \vec v\end{matrix}\right)$$

Was bedeutet $S(\boldsymbol{q}, t)$ physikalisch?

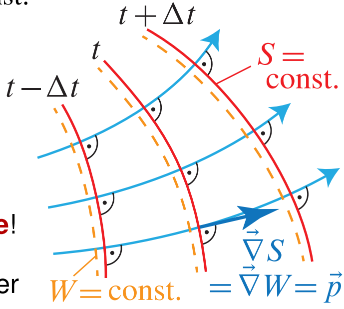
Leibniz Universität Hannover

Erinnerung: $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = E = \text{const.}$

$$\overset{\text{HJD}}{\Rightarrow} \quad E = -\frac{\partial S(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \overset{\substack{\textbf{einzelnes}\\ \text{Teilchen}\\ \downarrow}}{\doteq} -\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\Rightarrow} \quad \boxed{S(\vec{r}, t) =: -Et + W(\vec{r})}$$

$S(\vec{r}, t)$ repräsentiert die **Phase** einer **Welle**!



Phasengeschwindigkeit $\vec{u}$: »Surfer« auf der Welle »sieht« $S = \text{const.}$ bzw. $\mathrm{d}S = 0$:

$$\mathrm{d}S = -E\mathrm{d}t + \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{\nabla} W \overset{!}{=} 0 \quad \overset{\vec{u} := \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}{\Rightarrow} \quad \vec{u}\,\overbrace{\vec{\nabla} W}^{\vec{p} = m\vec{v}} = E$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{u}\,\vec{v} = \frac{E}{m}} \quad \left(\text{mit } \begin{array}{c} \vec{u} \upuparrows \vec{v} \\ \text{oder} \\ \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v} \end{array}\right) \quad \Rightarrow$$

Materie alternativ als **Teilchen** oder als (Wirkungs-)**Welle** betrachtbar!

. . . und die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung:

. . . und die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung:

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{E}{m} \text{ mit } \begin{array}{c} \vec{u} \upuparrows \vec{v} \\ \text{oder} \\ \vec{u} \upharpoonleft\!\downharpoonright \vec{v} \end{array}$$

. . . und die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung:

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{E}{m} \text{ mit } \begin{array}{c} \vec{u} \upuparrows \vec{v} \\ \text{oder} \\ \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v} \end{array}$$

$$\vec{p} = \vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S$$

. . . und die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung:

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{E}{m} \text{ mit } \begin{matrix}\vec{u} \upuparrows \vec{v} \\ \text{oder} \\ \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}\end{matrix}$$

$$\vec{p} = \vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S$$

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

. . . und die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung:

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{E}{m} \text{ mit } \begin{matrix} \vec{u} \upuparrows \vec{v} \\ \text{oder} \\ \vec{u} \updownarrows \vec{v} \end{matrix} \Rightarrow u^2 v^2 = \frac{E^2}{m^2}$$

$$\vec{p} = \vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S$$
$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

... und die Wellengleichung?

Wellengleichung:

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{E}{m} \text{ mit } \begin{matrix} \vec{u} \upuparrows \vec{v} \\ \text{oder} \\ \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v} \end{matrix} \;\Rightarrow\; u^2 v^2 = \frac{E^2}{m^2} \;\Rightarrow\; m^2 v^2 = \frac{E^2}{u^2} = p^2$$

$$\vec{p} = \vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S$$

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

... und die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung:

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{E}{m} \text{ mit } \begin{matrix}\vec{u} \upuparrows \vec{v} \\ \text{oder} \\ \vec{u} \updownarrows \vec{v}\end{matrix} \Rightarrow u^2 v^2 = \frac{E^2}{m^2} \Rightarrow m^2 v^2 = \underbrace{\frac{E^2}{u^2} = p^2}$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\left(\vec{\nabla} S\right)^2 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2}$$

. . . und die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung:

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{E}{m} \text{ mit } \begin{matrix} \vec{u} \upuparrows \vec{v} \\ \text{oder} \\ \vec{u} \updownarrows \vec{v} \end{matrix} \;\Rightarrow\; u^2 v^2 = \frac{E^2}{m^2} \;\Rightarrow\; m^2 v^2 = \underbrace{\frac{E^2}{u^2} = p^2}_{\downarrow}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\left(\vec{\nabla} S\right)^2 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2}$$

Eikonalgleichung (Licht bei $\lambda \to 0$):

... und die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung:

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{E}{m} \text{ mit } \begin{array}{c}\vec{u} \upuparrows \vec{v} \\ \text{oder} \\ \vec{u} \updownarrows \vec{v}\end{array} \Rightarrow u^2 v^2 = \frac{E^2}{m^2} \Rightarrow m^2 v^2 = \underbrace{\frac{E^2}{u^2} = p^2}_{\downarrow}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\left(\vec{\nabla} S\right)^2 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2}$$

Eikonalgleichung (Licht bei $\lambda \to 0$):

$$\boxed{\left(\vec{\nabla} P\right)^2 = \frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2}$$

…und die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

Wellengleichung:

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{E}{m} \text{ mit } \begin{matrix} \vec{u} \upuparrows \vec{v} \\ \text{oder} \\ \vec{u} \updownarrows \vec{v} \end{matrix} \;\Rightarrow\; u^2 v^2 = \frac{E^2}{m^2} \;\Rightarrow\; m^2 v^2 = \underbrace{\frac{E^2}{u^2} = p^2}_{\downarrow}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S \\ E &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\left(\vec{\nabla} S\right)^2 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2}$$

Eikonalgleichung (Licht bei $\lambda \to 0$):

$$\boxed{\left(\vec{\nabla} P\right)^2 = \frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2}$$

Fazit: Materie verhält sich völlig analog zu Licht bei unendlich kurzer Wellenlänge!

Übersicht

Leibniz Universität Hannover

1. Warum Quantenmechanik? – Historie
2. „Licht und Lichtstrahlen“ oder „Was ist ein Eikonal?“
3. Die Schwierigkeit mit Newtons Mechanik
4. Deshalb: Lagrange-Mechanik
5. Hamilton-Mechanik und das Hamilton-Jacobi-Verfahren: Besser als Lagrange?
6. Von Hamilton zu Schrödinger
7. Resultate und Zusammenfassung

Schrödingers Idee

$$\left(\vec{\nabla} S\right)^2 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2$$

klassische Mechanik

Schrödingers Idee

$$\left(\vec{\nabla} P\right)^2 = \frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\vec{\nabla} S\right)^2 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2$$

Strahlenoptik — klassische Mechanik

Schrödingers Idee

$$\Delta\phi(\vec{r},t) = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

$$\Big\Downarrow$$ **aus** der Wellenoptik

$$\left(\vec{\nabla} P\right)^2 = \frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\vec{\nabla} S\right)^2 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2$$

Strahlenoptik — klassische Mechanik

Schrödingers Idee

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\phi(\vec{r},t) = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

???

$\Downarrow$ **aus** der Wellenoptik

$\Uparrow$ **zur** Wellen-mechanik

$$\left(\vec{\nabla}P\right)^2 = \frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\vec{\nabla}S\right)^2 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2$$

Strahlenoptik — klassische Mechanik

Frage: Wie sieht eine mögliche **Wellengleichung** aus?

Schrödingers Idee

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\phi(\vec{r},t) = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

???

$\Downarrow$ **aus** der Wellenoptik

$\Uparrow$ **zur** Wellenmechanik

$$\left(\vec{\nabla}P\right)^2 = \frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\vec{\nabla}S\right)^2 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2$$

Strahlenoptik — klassische Mechanik

Frage: Wie sieht eine mögliche **Wellengleichung** aus?

> *»… Es ist gar nicht ausgemacht, daß sie gerade von der zweiten Ordnung sein muß, nur das Bestreben nach Einfachheit veranlaßt dazu, es zunächst damit zu versuchen.«*
>
> E. Schrödinger (1926, zweite Mitteilung)

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Leibniz Universität Hannover

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Vergleich zwischen Wirkung $S(\vec{r},t)$ und Eikonal $P(\vec{r},t)$:

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Leibniz Universität Hannover

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Vergleich zwischen Wirkung $S(\vec{r},t)$ und Eikonal $P(\vec{r},t)$:

klassische Mechanik	Strahlenoptik

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Leibniz Universität Hannover

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Vergleich zwischen Wirkung $S(\vec{r},t)$ und Eikonal $P(\vec{r},t)$:

klassische Mechanik	Strahlenoptik
$S(\vec{r},t) = W(\vec{r}) - Et$	

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Leibniz Universität Hannover

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Vergleich zwischen Wirkung $S(\vec{r},t)$ und Eikonal $P(\vec{r},t)$:

klassische Mechanik	Strahlenoptik
$S(\vec{r},t) = W(\vec{r}) - Et$	$P(\vec{r},t) = \vec{k}(\vec{r})\,\vec{r} - \omega t$

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Leibniz Universität Hannover

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Vergleich zwischen Wirkung $S(\vec{r},t)$ und Eikonal $P(\vec{r},t)$:

klassische Mechanik	Strahlenoptik
$S(\vec{r},t) = W(\vec{r}) - Et$	$P(\vec{r},t) = \vec{k}(\vec{r})\,\vec{r} - \omega t$
mit $\dfrac{\partial S}{\partial t} = -E$	
und $\vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S = \vec{p}$	

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Vergleich zwischen Wirkung $S(\vec{r},t)$ und Eikonal $P(\vec{r},t)$:

klassische Mechanik		Strahlenoptik	
	$S(\vec{r},t) = W(\vec{r}) - Et$		$P(\vec{r},t) = \vec{k}(\vec{r})\,\vec{r} - \omega t$
mit	$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$	$\Rightarrow$	$\frac{\partial P}{\partial t} = -\omega$
und	$\vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S = \vec{p}$	bzw.	$\vec{\nabla} P = \vec{k}$

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Leibniz Universität Hannover

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Vergleich zwischen Wirkung $S(\vec{r},t)$ und Eikonal $P(\vec{r},t)$:

klassische Mechanik		Strahlenoptik	
	$S(\vec{r},t) = W(\vec{r}) - Et$		$P(\vec{r},t) = \vec{k}(\vec{r})\,\vec{r} - \omega t$
mit	$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$	$\Rightarrow$	$\frac{\partial P}{\partial t} = -\omega$
und	$\vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S = \vec{p}$	bzw.	$\vec{\nabla} P = \vec{k}$

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Leibniz Universität Hannover

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Vergleich zwischen Wirkung $S(\vec{r},t)$ und Eikonal $P(\vec{r},t)$:

klassische Mechanik		Strahlenoptik	
	$S(\vec{r},t) = W(\vec{r}) - Et$		$P(\vec{r},t) = \vec{k}(\vec{r})\,\vec{r} - \omega t$
mit	$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$	$\Rightarrow$	$\frac{\partial P}{\partial t} = -\omega$
und	$\vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S = \vec{p}$	bzw.	$\vec{\nabla} P = \vec{k}$

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Vergleich zwischen Wirkung $S(\vec{r},t)$ und Eikonal $P(\vec{r},t)$:

klassische Mechanik		Strahlenoptik	
	$S(\vec{r},t) = W(\vec{r}) - Et$		$P(\vec{r},t) = \vec{k}(\vec{r})\,\vec{r} - \omega t$
mit	$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$	$\Rightarrow$	$\frac{\partial P}{\partial t} = -\omega$
und	$\vec{\nabla}W = \vec{\nabla}S = \vec{p}$	bzw.	$\vec{\nabla}P = \vec{k}$

$\Rightarrow \quad E \sim \omega$ und $\vec{p} \sim \vec{k}$

Aufgabe: Rate die richtige Wellengleichung!

Leibniz Universität Hannover

Ansatz:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Vergleich zwischen Wirkung $S(\vec{r},t)$ und Eikonal $P(\vec{r},t)$:

klassische Mechanik		Strahlenoptik	
	$S(\vec{r},t) = W(\vec{r}) - Et$		$P(\vec{r},t) = \vec{k}(\vec{r})\,\vec{r} - \omega t$
mit	$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$	$\Rightarrow$	$\frac{\partial P}{\partial t} = -\omega$
und	$\vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S = \vec{p}$	bzw.	$\vec{\nabla} P = \vec{k}$

$\Rightarrow \quad E \sim \omega$ und $\vec{p} \sim \vec{k}$ bzw. $\boxed{E = \hbar\omega}$ und $\boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k}}$ (vgl. de Broglie)

. . . und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

. . . und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

. . . und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

---

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2}$$

... und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{=}}$$

. . . und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

---

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{m^2 v^2}{E^2}$$

. . . und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

---

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{m^2 v^2}{E^2} = \frac{2m\overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{T}}{E^2}$$

. . . und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

---

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{m^2 v^2}{E^2} = \frac{2m\overbrace{\frac{1}{2}m v^2}^{T}}{E^2} \overset{E=T+V}{\overset{\downarrow}{=}}$$

...und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

---

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{m^2 v^2}{E^2} = \frac{2m\,\overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{T}}{E^2} \overset{E=T+V}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\underline{\frac{2m(E-V(\vec{r}))}{E^2}}}$$

. . . und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

---

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{m^2v^2}{E^2} = \frac{2m\overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{T}}{E^2} \overset{E=T+V}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\underline{\frac{2m(E-V(\vec{r}))}{E^2}}}$$

b) $$\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

… und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{\triangleq}} \frac{m^2v^2}{E^2} = \frac{2m\overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{T}}{E^2} \overset{E=T+V}{\overset{\downarrow}{\triangleq}} \underline{\underline{\frac{2m(E-V(\vec{r}))}{E^2}}}$$

b) $$\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \overset{E=\hbar\omega}{\overset{\downarrow}{\triangleq}}$$

. . . und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

---

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{m^2 v^2}{E^2} = \frac{2m\overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{T}}{E^2} \overset{E=T+V}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\underline{\frac{2m(E-V(\vec{r}))}{E^2}}}$$

b) $$\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \overset{E=\hbar\omega}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\underline{-\frac{E^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t)}}$$

…und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

---

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{m^2 v^2}{E^2} = \frac{2m\overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{T}}{E^2} \overset{E=T+V}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\underline{\frac{2m(E-V(\vec{r}))}{E^2}}}$$

b) $$\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \overset{E=\hbar\omega}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\underline{-\frac{E^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t)}}$$

Beides ($1/u^2$ und $\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2}$) eingesetzt in die **Wellengleichung**:

...und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

---

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{m^2 v^2}{E^2} = \frac{2m\overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{T}}{E^2} \overset{E=T+V}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\underline{\frac{2m(E-V(\vec{r}))}{E^2}}}$$

b) $$\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \overset{E=\hbar\omega}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\underline{-\frac{E^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t)}}$$

Beides ($1/u^2$ und $\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2}$) eingesetzt in die **Wellengleichung**:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) =$$

…und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

---

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{m^2 v^2}{E^2} = \frac{2m\,\overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{T}}{E^2} \overset{E=T+V}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{2m(E-V(\vec{r}))}{E^2}$$

b) $$\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \overset{E=\hbar\omega}{\overset{\downarrow}{=}} -\frac{E^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t)$$

Beides ($1/u^2$ und $\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2}$) eingesetzt in die **Wellengleichung**:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{2m\,(E-V(\vec{r}))}{E^2}$$

…und wie lautet jetzt die Wellengleichung?

Leibniz Universität Hannover

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

---

a) $$\frac{1}{u(\vec{r})^2} \overset{\vec{u}\vec{v}=\frac{E}{m}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{m^2v^2}{E^2} = \frac{2m\overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{T}}{E^2} \overset{E=T+V}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\underline{\frac{2m(E-V(\vec{r}))}{E^2}}}$$

b) $$\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} \overset{E=\hbar\omega}{\overset{\downarrow}{=}} \underline{\underline{-\frac{E^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t)}}$$

Beides ($1/u^2$ und $\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2}$) eingesetzt in die **Wellengleichung**:

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \frac{2m\,(E-V(\vec{r}))}{E^2}\cdot\left(-\frac{E^2}{\hbar^2}\right)\psi(\vec{r},t)$$

Schrödingergleichung = Wellengleichung

Leibniz Universität Hannover

Nach trivialer algebraischer Umformung:

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)\ \psi(\vec{r},t) = E\,\psi(\vec{r},t)}$$

Schrödingergleichung = Wellengleichung

Leibniz Universität Hannover

Nach trivialer algebraischer Umformung:

$$\boxed{\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)}_{\hat{H}\ \text{(Hamiltonoperator)}}\ \psi(\vec{r},t) = E\,\psi(\vec{r},t)}$$

Schrödingergleichung = Wellengleichung

Leibniz Universität Hannover

Nach trivialer algebraischer Umformung:

$$\boxed{\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)}_{\hat{H}\ \text{(Hamiltonoperator)}} \psi(\vec{r},t) = E\,\psi(\vec{r},t)}$$

zeit**un**abhängige Schrödingergleichung (**Eigenwertgleichung**)

Schrödingergleichung = Wellengleichung

Leibniz Universität Hannover

Nach trivialer algebraischer Umformung:

$$\boxed{\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)}_{\hat{H}\ \text{(Hamiltonoperator)}}\ \psi(\vec{r},t) = E\,\psi(\vec{r},t)}$$

zeit**un**abhängige Schrödingergleichung (**Eigenwertgleichung**)

Und mit $\dfrac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\mathrm{j}\omega\psi(\vec{r},t) = -\mathrm{j}\dfrac{E}{\hbar}\psi(\vec{r},t)$:

Schrödingergleichung = Wellengleichung

Leibniz Universität Hannover

Nach trivialer algebraischer Umformung:

$$\boxed{\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)}_{\hat{H}\ \text{(Hamiltonoperator)}}\ \psi(\vec{r},t) = E\,\psi(\vec{r},t)}$$

zeit**un**abhängige Schrödingergleichung (**Eigenwertgleichung**)

Und mit $\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\mathrm{j}\omega\psi(\vec{r},t) = -\mathrm{j}\frac{E}{\hbar}\psi(\vec{r},t)$:

$$\boxed{\hat{H}\,\psi(\vec{r},t) = \mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)}$$

Schrödingergleichung = Wellengleichung

Leibniz Universität Hannover

Nach trivialer algebraischer Umformung:

$$\boxed{\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)}_{\hat{H}\ \text{(Hamiltonoperator)}} \psi(\vec{r},t) = E\,\psi(\vec{r},t)}$$

zeit**un**abhängige Schrödingergleichung (**Eigenwertgleichung**)

Und mit $\dfrac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\mathrm{j}\omega\psi(\vec{r},t) = -\mathrm{j}\dfrac{E}{\hbar}\psi(\vec{r},t)$:

$$\boxed{\hat{H}\,\psi(\vec{r},t) = \mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)}$$

zeit**ab**hängige Schrödingergleichung

Übersicht

1 Warum Quantenmechanik? – Historie

2 „Licht und Lichtstrahlen“ oder „Was ist ein Eikonal?“

3 Die Schwierigkeit mit Newtons Mechanik

4 Deshalb: Lagrange-Mechanik

5 Hamilton-Mechanik und das Hamilton-Jacobi-Verfahren: Besser als Lagrange?

6 Von Hamilton zu Schrödinger

7 Resultate und Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Die Strahlenoptik folgt aus der Wellenoptik durch Grenzübergang zu verschwindend kleinen Wellenlängen

Zusammenfassung

- Die Strahlenoptik folgt aus der Wellenoptik durch Grenzübergang zu verschwindend kleinen Wellenlängen
- Aus der Hamilton-Jacobi-Formulierung der Mechanik folgt: Materie verhält sich klassisch wie Licht bei ∞ kurzer Wellenlänge

Zusammenfassung

Leibniz Universität Hannover

- Die Strahlenoptik folgt aus der Wellenoptik durch Grenzübergang zu verschwindend kleinen Wellenlängen
- Aus der Hamilton-Jacobi-Formulierung der Mechanik folgt: Materie verhält sich klassisch wie Licht bei ∞ kurzer Wellenlänge
- Der Übergang klassische Mechanik $\Longrightarrow$ Wellenmechanik entspricht formal dem Übergang Strahlenoptik $\Longrightarrow$ Wellenoptik

Zusammenfassung

Leibniz Universität Hannover

- Die Strahlenoptik folgt aus der Wellenoptik durch Grenzübergang zu verschwindend kleinen Wellenlängen
- Aus der Hamilton-Jacobi-Formulierung der Mechanik folgt: Materie verhält sich klassisch wie Licht bei ∞ kurzer Wellenlänge
- Der Übergang klassische Mechanik $\Longrightarrow$ Wellenmechanik entspricht formal dem Übergang Strahlenoptik $\Longrightarrow$ Wellenoptik
- Nicht zu Unrecht wird Hamilton oft als der »forgotten founder« der Quantenmechanik bezeichnet – **ca. 100 Jahre vor Schrödinger**!

Zusammenfassung

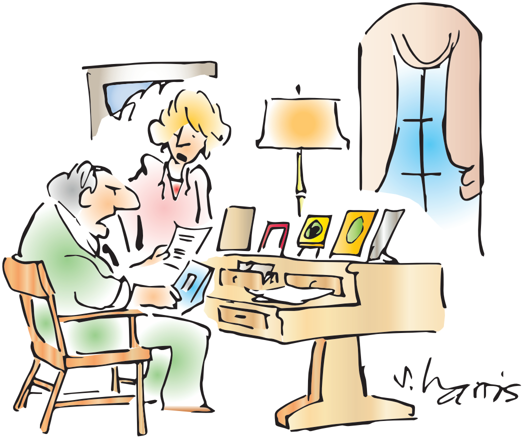
Leibniz Universität Hannover

- Die Strahlenoptik folgt aus der Wellenoptik durch Grenzübergang zu verschwindend kleinen Wellenlängen
- Aus der Hamilton-Jacobi-Formulierung der Mechanik folgt: Materie verhält sich klassisch wie Licht bei ∞ kurzer Wellenlänge
- Der Übergang klassische Mechanik $\Longrightarrow$ Wellenmechanik entspricht formal dem Übergang Strahlenoptik $\Longrightarrow$ Wellenoptik
- Nicht zu Unrecht wird Hamilton oft als der »forgotten founder« der Quantenmechanik bezeichnet – **ca. 100 Jahre vor Schrödinger**!

»Als Fazit könnte man festhalten: Die Schrödingergleichung fiel vom Himmel – Hamilton hat sie geschossen und Schrödinger hat sie apportiert.«

A. M. Grabinski (25. März 2015)

Welle oder Teilchen?



„Once and for all I want to know what I'm paying for!
When the electric company tells me
whether light is a wave or a particle I'll write my check."